Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

60e jaargang
1984|1985
februari

Euclides 6

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Mw I. van Breugel
Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur)
W. M. J. M. van Gaans
Dr F. Goffree
Drs W. Kleijne
L. A. G. M. Muskens
Drs C. G. J. Nagtegaal
P. E. de Roest (secretaris, wnd. eindredacteur)
Mw H. S. Susijn-van Zaale
Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Oproep

Sinds kort is binnen de redactie van Euclides de functie

EINDREDACTEUR m/v

vrijgekomen.

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren roept belangstellenden voor deze functie op zich zo spoedig mogelijk te melden bij de hoofdredacteur.
Deze taak van de eindredacteur bestaat vooral uit het samenstellen en eindredactioneel verzorgen van de nummers van Euclides.
De eindredacteur werkt samen met de hoofdredacteur (die voor de inhoudelijke beoordeling van kopij zorgdraagt) en de secretaris van de redactie (die de contacten met auteurs verzorgt) en wordt technisch ondersteund door de uitgeverij.

Van de eindredacteur wordt verwacht dat hij/zij
- ongeveer één avond per week beschikbaar heeft voor dit werk
- nauwgezet en zelfstandig kan werken
- belangstelling voor de didactiek van de wiskunde heeft
- vier redactievergaderingen per jaar bij wil wonen.

Er wordt een onkostenvergoeding beschikbaar gesteld. Na (persoonlijke) contacten met één of meer leden van de redactie en van het bestuur benoemt het bestuur van de vereniging de nieuwe eindredacteur voor een periode van vier jaar.
Alvorens tot benoeming over te gaan wint het bestuur het advies van de uitgever in.

Voor inlichtingen met betrekking tot deze vacature kan men zich wenden tot de hoofdredacteur, Frans Dolmans, tel. 08894-1 17 30 ('s avonds).
De redactie stelt het op prijs om op kandidaten geattendeerd te worden.

Meisjes samen?*

Rijkje Dekker

Goede groepjes hadden we in onze werkgroep op de najaarsdag van de vereniging. Iedereen had zich geconcentreerd over een bladzijde uit een wiskunde-pakketje voor de brugklas gebogen en sommige groepjes waren al gauw druk aan het overleggen. We hadden ze gevraagd om te voorspellen hoe zo'n bladzijde in een meisjesgroep en in een gemengd groepje gemaakt zou worden. Wat zouden opvallende overeenkomsten en verschillen zijn?
Om de bladzijde hiernaast afgebeeld ging het.

Onomwonden spraken de groepjes hun verwachtingen uit en die logen er niet om:
Meisjes brengen meer structuur aan in de samenwerking dan jongens.
Meisjes zullen bij de b-vraag een heel verhaaltje willen verzinnen, het ballonnetje is vast te klein.
Jongens en meisjes in de brugklas zullen deze opdracht even leuk vinden.
Jongens zullen snel naar een antwoord toe werken.
Jongens zullen zich samen achter één antwoord verschuilen.
Meisjes luisteren beter naar elkaar dan jongens.
Jongens in een gemengd groepje zullen overheersen.

De praktijk
Een meisjesgroepje in een brugklas in het oosten des lands en een gemengd groepje in hartje Amsterdam hebben zich over dezelfde opdracht gebogen. Hun werk werd geobserveerd en in verslagen vastgelegd. Deze zijn we in de werkgroep na het formuleren van de verwachtingen gaan analyseren.

* Een verslag uit de werkgroep 'Samenwerken en observeren'.

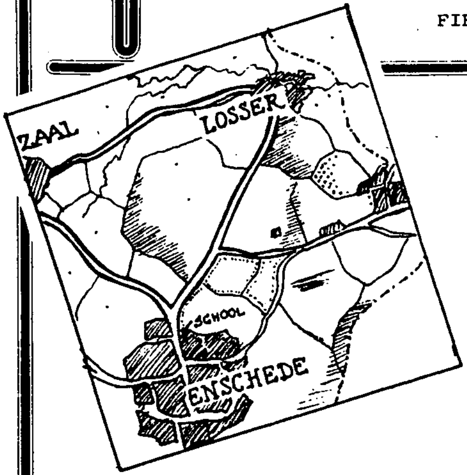
De overeenkomsten tussen beide groepjes leerlingen bij het beantwoorden van de a-vraag zijn opvallend. In beide groepjes worden de verhaaltjes voorgelezen en genummerd. Hardopdenkend en elkaar aanvullend komen ze beide tot een eensgezind en goed antwoord. De echte verschillen komen bij de b-vraag naar voren. In het meisjesgroepje werd deze zo gemaakt:

Tasja: 'En dan kun je bij Marijke zoiets verzinnen als, gewoon lekker hard fietsen, band lek. Band plakken en weer verder fietsen'.
Berdien: 'Ja maar, dan kom je te laat'.
Erna: 'Nee, daarna gaat ze keihard fietsen'.
Berdien: 'Nee, dat kan niet, want dat is net zo schuin' (ze wijst op de twee oplopende stukjes in grafiek 2).
Erna: 'Dan fietst ze gewoon niet keihard, anders ging 't wel steiler'.
Berdien: 'Ze fietst niet keihard, wordt dan moe; gaat even uitrusten en fietst dan weer verder'.
Tasja: 'Ik heb nog nooit iemand gezien die gaat uitrusten'.
Colette: 'Ik ook niet'.
Berdien houdt vast aan het uitrusten van Marijke. Ze doet een nieuw voorstel: 'Marijke is op weg naar school. Dan moet ze over een heuveltje. Rust uit op de top en daarna gaat ze lekker snel naar beneden'.
Tasja vult aan: 'en zodoende kwam ik toch nog op tijd'.
Berdien vraagt aan mij wat ik van haar voorstel vind. Ik geef daar geen antwoord op en vraag wat het horizontale lijntje in de grafiek voorstelt.
Tasja en Erna: 'een stop'.
O.: 'Dus ze staat stil'.
Tasje: 'Ja, oh, dan is het toch een lekke band'.
Daarom stellen Berdien en Tasja het volgende antwoord op. 'Ik ging van huis en reed in het begin lekker snel. Toen moest ik plotseling stoppen, m'n band was lek. Er zat een spijker in. Nadat ik hem geplakt had, reed ik snel naar school. Ik was net op tijd'.

En in het andere groepje zo:

Cari: 'Moeten we verzinnen bij twee, Roos, mag jij even verzinnen'.
Roos lacht.
Het is even stil.
Roos: 'In het begin ...'.
'Ik fietste zo ...', zegt Jane.
Roos: '... begin snel en daarna ...'.
Jane: '... en toen eh ...'.
Roos: 'ging het wat langzamer ...'.
Rik: 'en toen kwam er een tegenligger en viel ik op de grond'.
'Nee, een klapband', zegt José.
'Nee', zegt Jane.
Rik: 'viel ik op de grond toen had ik even pijn toen stapte ik weer snel op de fiets want ik wou niet te laat komen'.
'Toen ging ik hinkelend lopen', zegt José.
'Nee', zegt Rik.

FIETSEN (1)



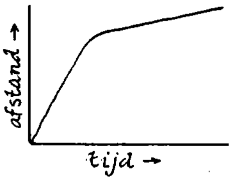
Veel kinderen uit Losser gaan in Enschede naar school.
Meestal gaan ze op de fiets.
Het eerste lesuur begint om kwart over 8; dat betekent dat de meeste leerlingen al om half 8 de deur uitgaan. Want te laat komen....

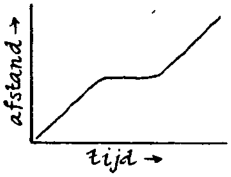
De afstand van Losser naar school is (vrijwel) 10 kilometer.

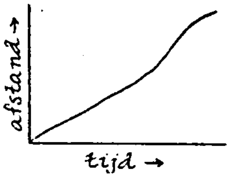
De vier grafieken die je hieronder ziet laten zien hoe de afstand tot huis verandert als Freek, Hermien, Marijke en Yoeri naar school gaan.

a. Welke grafiek hoort bij wie?

b. Bedenk ook wat Marijke gezegd zal hebben.







YOERI

Ik ga altijd rustig van start. Want, ik zeg maar zo, 's morgens voor de koffie moet je niet zeuren... Meestal ga ik onderweg wel wat harder fietsen, want ik heb een hekel aan te laat komen.

HERMIEN

Ik was net van huis vertrokken toen ik me bedacht dat we vandaag gym hebben. En ik m'n gymspullen vergeten. Stom hè? Ben maar even terug naar huis gegaan om ze op te halen. Toen moest ik wel heel hard fietsen om nog op tijd te komen.

FREEK

Ik vanmorgen lekker met de brommer naar school. Goed snel natuurlijk. Maar onderweg: sputter-sputter. Zit ik zonder benzine! Ik balen natuurlijk. Brommer aan de kant van de weg en lopen. Nog net op tijd...

MARIJKE

José: 'Omdat ik pijn had'.
'Tuurlijk', zegt Rik.
Jane: 'Hè?!'.
Cari: 'van de fiets af, ging ik heel hard rennen'.
'Nee', lacht Rik.
Jane: 'Of eh ...'.
Rik: 'Ik ging fietsen toen kwam er een auto aan, ik viel op de grond, ik had even pijn, ik liep even met de fiets en toen was de pijn over en toen fietste ik snel naar school om niet te läat te komen'.
Jane: 'Nee, ik fietste op m'n fiets en toen hoorde ik "sputter-sputter" en toen keek ik wat er aan de hand was maar het was niets en toen reed ik gewoon naar school'.
'Precies hetzelfde als met die motor "sputter-sputter"', zegt José.
'Ja', zegt Jane, maar toen kon die niet meer rijden die moter en toen moestie lopen'.
Rik: 'Nou ja, dan schrijven jullie op wat je zelf leuk vindt. Ik schrijf m'n eigen dingen'.

We waren in de werkgroep echt verrast om te zien hoe sommige verwachtingen precies uitkomen en andere juist weer helemaal niet. Op één verschil tussen beide groepjes, misschien wel het meest wiskundige verschil, wil ik in dit verslag ingaan, de kwaliteit van het antwoord op de b-vraag.

De wiskunde
In onze werkgroep hadden we de groepjes van tevoren gevraagd zelf een antwoord op de b-vraag te formuleren en zo te horen vond iedereen een goede interpretatie van het horizontale stukje in de afstand/tijd grafiek, de kern van de opdracht. Het waren allemaal korte fietsverhaaltjes met een stop erin.
Zoiets als Tasja in het meisjesgroepje aan het begin formuleert: 'Gewoon lekker hard fietsen, band lek, band plakken en weer verder fietsen'. Globaal gezien lijkt het uiteindelijk geformuleerde antwoord in het meisjesgroepje hetzelfde: 'Ik ging van huis en reed in het begin lekker snel. Toen moest ik plotseling stoppen, m'n band was lek. Er zat een spijker in. Nadat ik hem geplakt had, reed ik snel naar school. Ik was net op tijd'.
Toch zijn er bij nadere beschouwing een aantal verfijningen in het laatste antwoord verwerkt, die het echt beter maken dan het eerste. Marijke moet bijvoorbeeld op tijd komen volgens de meiden. Misschien dat ze dit geconcludeerd hebben omdat dat in de andere drie verhaaltjes ook zo is en de grafiekjes wat hun tijd-as betreft gelijk zijn. Om op tijd te komen en toch een vrij lange stop te hebben gemaakt moet ze hard gefietst hebben. Maar ná de stop fietst ze niet harder dan vóór de stop want de stukjes in de grafiek zijn even schuin. Ze moet dus al snel vertrokken zijn. Maar ze fietste ook weer niet keihard want daarvoor lopen de stukjes weer niet schuin genoeg. 'Lekker snel' lijkt een goed compromis. Dan het gevecht om een zo realistisch mogelijk verhaaltje. Daar wordt zelfs de observator voor aangesproken.
Ze doen echt hun best om alles bondig in hun gezamenlijke antwoord te verwerken. De inhoud èn de verpakking moet goed zijn. Alleen Colette lijkt een beetje buiten spel te staan. Onduidelijk of zij het echt begrepen heeft.

En dan het andere groepje.
Roos, die van Cari de beurt toegeschoven krijgt, lijkt de grafiek fout te interpreteren, maar Jane komt er al gauw overheen met háár oplossing. Dáár komt Rik weer overheen die een aardig verhaaltje produceert waar de stop in ieder geval inzit. José wil Riks antwoord echt realistisch maken, het hinkelen moet erin. Interpreteert hij het horizontale stukje verkeerd? Jane formuleert nog een eenvoudig en goed antwoord maar José vindt het gekunsteld. Rik wil z'n eigen dingen doen en zo gebeurt het. Cari houdt zich in de hele discussie die alleen over de verpakking lijkt te gaan afzijdig. Onduidelijk of in dit groepje iedereen de kern van de opdracht begrepen heeft, afgezien nog van de verfijningen. Maar gelukkig is er meer informatie uit dit groepje. L., hun lerares, komt even later langs en informeert naar de verschillende oplossingen. Zo komen we er toch achter of iedereen het echt begrepen heeft.

L. komt langs. 'Waar zijn we? Doe eens even rustig'.
Ze kijkt in José's map.
'Heb ik bedacht', zegt Rik.
José wijst op het tweede grafiekje: 'Dit is dus Marijke'.
'Ja', zegt L.
'Heb ik bedacht', zegt Rik.
José: 'Enne die ging normaal van start. Plotseling kwam er een tegenligger en ik viel. Door de pijn liep ik even met de fiets. Toen het over was ging ik weer fietsen'.
L.: 'Hebben jullie allemaal hetzelfde verhaal?'.
'Nee', zegt Rik.
Cari en Jane knikken van ja, Jane lacht.
'Hun vonden het niet goed, zegt Rik.
L. vraagt Cari haar verhaaltje op te lezen.
Cari: 'Ik ging normaal van start. In het begin fietste ik hard

maar toen viel ik want ik fietste even met m'n handen los. Ik moest mijn band even oppompen want hij was lek. Toen hij opgepompt was ging ik weer hard fietsen'.
'Lek, band plakken', zegt Rik.
Jane: 'Ik heb weer wat anders'.
L.: 'Jij hebt nog iets anders. Wat gebeurt er in ieder geval met Marijke?'.
'Ze viel', zegt Cari.
'Ze rijdt wat langzamer', zegt Jane.
José: 'Maar ik snap het niet want als je je band oppompt ga je toch niet vooruit, ga je toch niet helemaal die kant op?'
Hij gaat met zijn vinger langs het horizontale stukje in de grafiek.
L.: 'Maar gáát ze hier vooruit? Kijk eens goed naar dat stukje'.
'Ja, klein stukje', zegt Rik.
José: 'Ja, ze gaat een stuk vooruit dus loopt ze effe en denkt ze, nou ga ik maar weer even fietsen'.
L.: 'Ja, maar kijk nu eens goed. Zo loopt die lijn'. L. toont met haar hand de lijn van de grafiek.
'Nee, ze blijft staan', zegt Jane.
L.: 'De tijd gaat door maar de afstand ...'.
'blijft staan', zegt Jane.
L.: 'die blijft hetzelfde'.
Jane: 'Ja nou, dan heb ik het goed'.
L.: 'Dus in ieder geval staat ze effies stil'.
'Dan heb ik het ook goed', zegt Cari.
Jane: 'Ja, want ik heb hier staan ze ging even kijken ...'.
Rik: 'Ze viel, ja'.
L.: 'Ze moest even wachten en ...'.
Jane: '... en ik ging kijken wat er aan de hand was en er was niks, toen reed ik weer verder'.
L.: 'Ze had pijn, ze viel, ze moest even stoppen, eventjes wachten. Toen was het over en toen ...'.
L. kijkt naar Roos: 'Jij hebt weer een andere?'.
'Nee, ik heb hetzelfde', zegt Roos.
Rik: 'Lees eens even hardop'.
Roos: 'Ik ging gewoon van start. Toen viel ik en bleef leggen. Daarna stapte ik op en ging naar school'.
'Bleef leggen?', zegt Jane.
L.: 'Nou goed, wie is deze nummer één?'.
Ze wijst op het eerste grafiekje.
'Freek', zegt José.
L.: 'Twee is Marijke dan en drie?'.
'Yoeri', zegt Rik.
'Yoeri', zegt José.
L.: 'Yoeri en vier?'.
'Hermien', zegt Cari.
'Perfect', zegt Rik.
'Hartstikke goed', zegt L. en ze gaat weg.
Cari: 'Yoeri één, Hermien vier, Freek één, Marijke twee'.
José: 'Nou gaan we naar de volgende bladzijde' en hij zucht.

Cari heeft dus nog echt werk van haar antwoord gemaakt. Jane en Roos hebben weliswaar eenvoudige antwoorden maar de stop zit goed. En gelukkig wordt José's foute inzicht toch nog op tijd door L. ontdekt en weet ze door de verschillende antwoorden samen te vatten de kern van de opdracht voor iedereen te verduidelijken. Zo'n lerares is bij groepswerk echt goud waard!

Zes mensen waren bij de voorbereiding van deze werkgroep betrokken: Anna Tessel, studente wiskunde op d'Witte Leli, Noor Blom, lerares wiskunde op een middenschool, Anneke Teitler en Wim Kerkhofs, medewerkers aan het SLO-project 'Wiskunde 12-16', Paul Herfs en ik, medewerkers aan het SVO-project 'Interne Differentiatie Wiskundeonderwijs 12-16' van de vakgroep Onderwijskunde van de Universiteit van Utrecht.
Dit gebruikte wiskundemateriaal is door het SLO-project ontwikkeld. De observatieverslagen zijn van Paul en mij.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' in dit nummer en in voorafgaande nummers)

1985	
vr 22 mrt:	eerste ronde Ned. Wisk. Olympiade
23 mrt:	gem. studiedag NVvW, VVWL, Kapellen (B)
28 t/m 30 mrt:	E-conferentie, Ede
za 30 mrt:	landelijke dag Vrouwen en Wiskunde
wo 3 apr:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
di 7 mei:	examenbesprekingen voor havo en vwo
vr 10 mei:	examenbesprekingen voor lbo, mavo; vwo wiskunde II
wo 15 mei:	bestuursvergadering NVvW, Utrecht
22 t/m 26 juli:	conferentie IGPME, Noordwijkerhout
vr 13 sep:	tweede ronde Ned. Wisk. Olympiade
1986	
11-16 aug:	ICOTS II, Victoria BC, Canada

Het lbo- en het mavo-examen wiskunde

De redactie heeft van veel kanten het verzoek gekregen alles omtrent heden en toekomst van de lbo- en de mavo-examens eens op een rijtje te zetten. Men heeft behoefte aan duidelijke informatie en aan het wegnemen van onzekerheden. De redactie heeft getracht voldoende inlichtingen te verkrijgen om aan de vraag tegemoet te komen. Eén ding kan ze echter niet: voorspellen hoe beslissingen zullen uitvallen die nog niet genomen zijn.

1 Hoe komen de examens tot stand?

a De gang van zaken in grote lijnen

Bij de totstandkoming van een examen spelen drie instanties een voorname rol. Dat zijn de CEVO (Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven), de ACD (AdviesCommissie Docenten) en het CITO (Centraal Instituut Toets Ontwikkeling).

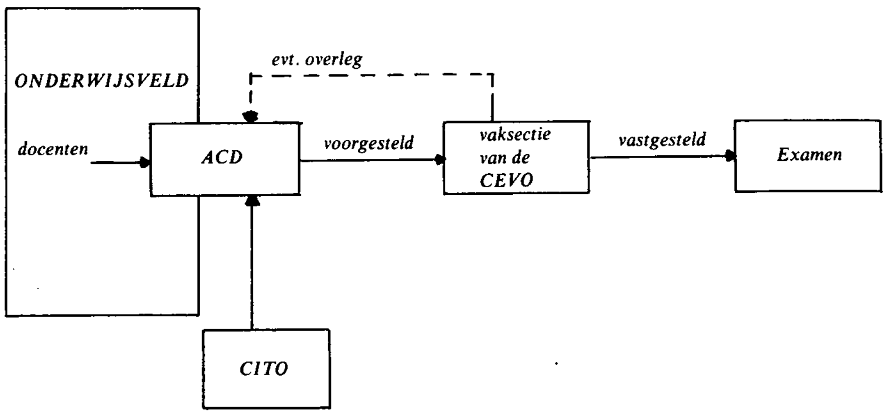
Het schema hieronder geeft de gang van zaken weer bij het totstandkomen van een examen.

De ACD maakt, begeleid door het CITO, een examenvoorstel. Dit wordt aangeboden aan de vaksectie van de CEVO, die het vaststelt, eventueel na overleg met de ACD. De instroom uit het onderwijsveld is, sinds het inzenden van opgaven niet meer gehonoreerd wordt, helaas tot nul gereduceerd.

b De CEVO

Eerst de structuur van de CEVO. De CEVO is samengesteld uit deskundigen uit het lbo-, mavo-, havo- en vwo-onderwijs. Ze heeft een algemeen bestuur, dat uit 16 leden bestaat, en een aantal vaksecties, waaronder de vaksectie wiskunde. Elke vaksectie is samengesteld uit vertegenwoordigers van de schoolsoorten waarin het vak examenvak is. Het aantal leden in de vaksectie wiskunde is voor lbo-mavo momenteel zes.
De leden worden benoemd door de Minister, voor ten hoogste tien jaar. De voorzitter van een vaksectie is een inspecteur. Deze treedt op als vakcoördinator. Er kunnen meer dan één inspecteur lid van een vaksectie zijn. De benoeming van de overige leden geschiedt op voordracht van de docenten- en de besturenorganisaties.

Nu de werkwijze. De vaksectie ontvangt van de ACD een concept-examen met correctievoorschrift. Zo'n concept-examen wordt bekeken op 'haalbaarheid'. De criteria die hierbij gelden, zijn niet strak geformuleerd, zodat de intuïtie van de



CEVO-leden een belangrijke rol speelt bij de beoordeling. Enkele gedragsregels zijn in de loop van de tijd uiteraard wel ontstaan. Zo geldt bijvoorbeeld dat een matige leerling een zes moet kunnen halen, dat er geen stapeling (cascade) in de onderdelen van een opgave mag zitten, dat de vraagstukken niet te formeel geredigeerd mogen zijn, dat het examen binnen de grenzen van het programma moet blijven en dat een zo breed mogelijk gebied aan bod moet komen.
Eindexamens kunnen een sturende werking hebben op het onderwijs met betrekking tot de aard van de te behandelen vraagstukken. De CEVO is zich bewust hiermee voorzichtig te moeten zijn. Opgaven die tot de grens van het examenprogramma reiken, worden dan ook slechts met mate geaccepteerd. Zo kan men zich afvragen of men op het mavo-D-examen mag vragen de vergelijking $x^4 = 81$ op te lossen. In het programma staat niets over het oplossen van vierdegraads vergelijkingen, maar wel is vanzelfsprekend dat de leerling iets moet weten over vierdemachten. Hier is dus sprake van een randgeval. Het vragen naar de oplossing van $x^4 = 81$ kan leiden tot accentverschuivingen in het onderwijs. Voorzichtigheid is dus geboden.
Nadat de vaksectie van de CEVO het concept geanalyseerd heeft, worden als regel veranderingen voorgesteld. Deze worden met de ACD doorgesproken. Dit kan leiden tot een herhaald heen en weer gaan van voorstellen, waarbij zeer grondig tewerkgegaan wordt. De CEVO draagt de verantwoordelijkheid voor het eindresultaat en heeft uiteraard dan ook het laatste woord.
Taak van de CEVO is ook de cesuur (grens voldoende-onvoldoende) vast te stellen.

c De ACD

Een ACD bestaat uit leraren in actieve dienst die hun hoofdbetrekking hebben bij de betreffende schoolsoort, en een medewerker van het CITO. De docent-leden van de ACD worden geworven door middel van een advertentie. Ze worden door de Minister van Onderwijs en Wetenschappen en de Minister van Landbouw en Visserij benoemd op voordracht van de voorzitter van de vaksectie van de CEVO en het CITO. De benoeming geschiedt voor één jaar. Ze kan verlengd worden met één jaar en daarna nog tweemaal met twee jaar. In elke ACD hebben als regel drie docenten zitting. Ze zijn voor vier uur van hun lestaak vrijgesteld. Ze mogen geen deel uitmaken van een team van auteurs van een schoolboek.
Met het besluit van de Staatssecretaris in 1986 over te gaan van twee examenzittingen op één is het aantal ACD's voor lbo-mavo teruggebracht tot twee, namelijk één voor het C- en één voor het D-examen. Ze ontwerpen elk jaar drie conceptexamens, voor de drie tijdvakken. Voorzover het de open vragen betreft wordt er een correctievoorschrift en een toetsmatrijs bijgevoegd. De organisatorische leiding van elke ACD berust bij de medewerker van het CITO.

d Het CITO

Uit het voorgaande blijkt dat de rol van het CITO veel bescheidener is dan vaak wordt aangenomen. De CITO-medewerker bewaakt de toetstechnische kwaliteit, hij geeft adviezen en zorgt ervoor dat de conceptopgaven op tijd klaar zijn. Hij beschikt over scoreresultaten van vroegere examenopgaven en over enquêtegegevens. Hierbij kan bij de constructie van de opgaven gebruik gemaakt worden. Alle noodzakelijke administratie wordt verricht door het CITO. De inhoud van het examen wordt echter niet door het CITO bepaald.

e De mensen achter de schermen

In de CEVO hebben op dit moment zitting voor wiskunde lbo-mavo:
J. Boersma (inspecteur),
F. J. Mahieu (docent mavo),
mw. W. M. G. Querelle (docent mavo-leao),
A. A. Braat (docent lto),
A. P. van den Brul (docent lhno)
en G. Helder (docent llo).
De eerste drie stellen het werk vast voor mavo-D, alle zes stellen het werk vast voor lbo-mavo-C.
De CITO-medewerker in de ACD is G. Bakker. De namen van de docent-leden worden niet gepubliceerd om ongewenste neven-effecten te voorkomen.

2 Tendensen met betrekking tot het eindexamen

Zekerheid omtrent de toekomst kunnen we niet verschaffen; maar wel is het mogelijk te constateren

welke tendensen bij de verschillende instanties te bespeuren zijn.
Bij de overheid
- bezuinigen
- c.s.e. is een 'must'
- voorkeur voor machinaal scoorbare toetsing
- ontkoppeling c.s.e.-s.o.

Bij de CEVO (voor alle vakken)
- streven naar uniformiteit (alle vakken één zitting, zelfde tijdsduur)
- op lbo-mavo niveau voor de meeste vakken een combinatie van open vragen en machinaal scoorbare toetsing
- harmonisering van het C-examen (een gelijk C-examen voor alle soorten lbo en voor mavo)

Bij de vaksectie van de CEVO en de ACD's (voor wiskunde)
- neiging tot niveauhandhaving, ondanks de toenemende belangstelling voor havo ten koste van het mavo, waardoor kwaliteitsdaling dreigt
- tegemoetkomen aan de leerling (eenvoudiger taalgebruik, minder gebruik van symbolen)
- een groeiend bewustzijn van de trits: formulering toetsdoel → keuze juiste vraagvorm → zo objectief mogelijke en nauwkeurige beoordeling
- geen behoefte aan meer gesloten vragen
- in verband daarmee wordt de 30% regeling, die inhoudt dat maximaal 30% van het examen mag bestaan uit open vragen, vertaald in precies 30%

Bij het CITO
- c.s.e. is een 'must'
- zo objectief mogelijke beoordeling
- behoefte aan nauwkeurig vastgelegde eindtermen
- het belang inzien van de trits: eindtermen → te toetsen leerdoelen → keuze optimale vraagvorm en beoordelingswijze

Bij de NVvW
- eigen leraar zoveel mogelijk bij het examen betrekken
- schoolonderzoek moet geen doublure zijn van het c.s.e.; eigen vorm voor het s.o. zoeken
- een op de leerling afgestemde vorm van het examen (zie F. J. Mahieu, Verslag Werkgroep (ingesteld door de NVvW) lbo/mavo-examen, Euclides 58 (1982-83), nr. 1, blz. 3-16
- de betrouwbaarheid van de toets is belangrijk, maar niet primair (zie de brief aan de Staatssecretaris van 4 mei 1984, gepubliceerd in Euclides 60 (1984-85), nr. 7.
- de invloed van het examen op het onderwijs moet een positieve, stimulerende zijn en mag niet belemmerend werken op gezonde ontwikkelingen binnen het onderwijs

Bij de AGEP (Adviesgroep voor Examen Programma's)
- streven naar een centraal examen voor het C-niveau bij lbo en mavo, gecombineerd met eigen s.o. per schoolsoort
- streven naar objectief scoorbare toetsen
- bewustzijn dat het programma moet aansluiten bij de praktijk van het onderwijs en niet belemmerend mag werken op onderwijskundige ontwikkelingen.

Deze staalkaart is interessant, maar biedt nog weinig houvast. Wat kunnen we in elk geval vaststellen?
We weten dat het c.s.e. zal bestaan uit voor 30% open vragen en voor 70% gesloten vragen. We weten nog niet van welke aard deze zullen zijn. Totnogtoe bestonden de gesloten vragen uit meerkeuzevragen met keuze uit vier mogelijkheden waarvan er precies één goed is. Er zijn andere gesloten vraagvormen zoals de meerkeuzevragen waarbij van de p mogelijkheden er q goed zijn ($p \geqq 2$, $q \geqq 0$), en de vragen waarbij alleen het antwoord gegeven moet worden (zoals bij de eerste ronde van de olympiade). Welke vraagvorm gekozen zal worden, ligt nog niet vast. CEVO, CITO en ACD's houden zich met het probleem bezig.
Van belang is verder het werk van de AGEP. Deze commissie is ingesteld door de Staatssecretaris. In het besluit betreffende haar instelling lezen we:
'Zij (de AGEP) geeft de inventarisatie (van de leerstof) in handen van examenprogrammacommissies (EPC's) van deskundigen om daaruit één geharmoniseerd examenprogramma voor de examenvakken van het mavo en het lbo samen te stellen. Dit examenprogramma zal voorzover het bepalend is voor de constructie van examenopgaven voor de centraal af te nemen examens voor alle schoolsoorten eensluidend en eenduidig zijn. Voorzover het bepalend is voor het schoolonderzoek zijn absoluut noodzakelijke varianten per soort van het lbo mogelijk.'
Dus een uniform C-examen met differentiatiemogelijkheid per schoolsoort in het s.o.
Een andere uitspraak van de AGEP is:
'De te ontwikkelen programma's moeten zoveel

mogelijk aansluiting hebben bij de praktijk in het onderwijs. Dit kan ertoe leiden dat de programma's regelmatig bijstelling behoeven. De formulering van de programma's zal de ontwikkelingen binnen het lbo niet in de weg mogen staan.'
Op het ogenblik is er een wiskunde A en B bij het vwo. Bij het havo is een dergelijke herverkaveling in voorbereiding. Zal ook bij het mavo en het lbo de toepassing van de wiskunde op de praktijk een belangrijker plaats krijgen? Het is nog niet bekend, maar de hier geciteerde uitspraken openen in elk geval mogelijkheden.

3 Het verschil tussen C- en D-niveau

De formulering van de huidige examenprogramma's van mavo-C en -D is te vinden in het Vademecum voor de Wiskundeleraar op blz. 19-20. De onderwerpen vectoren en tweedegraads ongelijkheden ontbreken bij mavo-C, terwijl de leerstof voor relaties en voor goniometrie minder omvattend is dan bij mavo-D. Zo ontbreekt bij de goniometrie de sinus- en de cosinusregel. Bij andere onderwerpen: beschrijvende statistiek, tweedegraads functies, tweedegraads vergelijkingen en hoek- en afstandsberekeningen, is in het C-programma het woord 'eenvoudig' toegevoegd.
De leraar wil graag weten wat hier precies onder 'eenvoudig' verstaan wordt. Een precieze omschrijving daarvan is echter niet mogelijk. Een programma bestaat uit richtlijnen. De interpretatie daarvan geschiedt enerzijds door de auteurs van schoolboeken, anderzijds door de opstellers van examenopgaven. Tussen beide, dus tussen schoolboeken en het werk van de ACD's, bestaat een wisselwerking. Een ACD let op de inhoud van de schoolboeken bij het opstellen van de vraagstukken; de schoolboekschrijvers letten op de examens bij het schrijven of herzien van hun boeken. De leraar kan van dit proces kennisnemen en zijn onderwijs erdoor laten beïnvloeden.
Toch valt er wel iets te zeggen over het verschil tussen C- en D-examenopgaven. De C-opgaven zijn over het algemeen minder formeel, er wordt gestreefd naar minder gebruik van symbolen en van eenvoudiger woordgebruik. De opgaven zijn minder complex, er worden ter ondersteuning van de redactie meer tekeningen toegevoegd en er komen minder parameters in voor.

Het programma voor lbo-C is niet geheel gelijkluidend aan dat voor mavo-C. Desondanks heeft zich in de loop van de jaren een harmonisatie van hun examens ontwikkeld, die nu zover gevorderd is, dat alleen vijf meerkeuzevragen waarin goniometrie in voorkomt, vervangen worden door andere voor leao, lhno, lmo en llo.
Wat levert de toekomst? Men is op het ogenblik bezig met het herschrijven van de C-programma's. Dit zal volledige harmonisatie van de examens tot gevolg hebben. Wat de plaats van de goniometrie dan zal zijn, is nog niet beslist. Verder zal het D-examen ook toegankelijk worden gesteld voor lbo-leerlingen.

4 De cesuurbepaling

Vroeger, voor 1972, werden de examenopgaven opgesteld door een commissie die uit enkele leraren bestond. Het kon daardoor wel eens voorkomen, dat een examen duidelijk moeilijker of makkelijker uitviel dan de bedoeling was. Sindsdien is er veel verbeterd. Men heeft dat in 1 kunnen lezen. Desondanks blijft het mensenwerk. Vandaar dat de CEVO door middel van een steekproef te weten wil komen hoe het examen uitgevallen is, voordat de cesuur vastgesteld wordt. Zo is een laatste controle ingebouwd ten bate van de leerling. De praktijk leert dat deze controle nuttig kan zijn. De mogelijkheid is altijd aanwezig dat het examen achteraf onverwachte moeilijkheden blijkt te bevatten. Kleine oorzaken, zoals een bepaald woord- of symboolgebruik, een nevenoplossing die veel rekenwerk vereist, kunnen grote gevolgen hebben, vooral als ze voorkomen in het eerste vraagstuk en de leerling daardoor tijd verliest en in paniek raakt. Een verleggen van de cesuur kan dan billijk zijn.
Een andere vraag is waarom cesuurverlegging bij de open vragen wel mogelijk is bij het eerste, maar niet bij het tweede tijdvak. Daarvoor zijn twee redenen:

a Een praktische reden. Zou men bij het tweede tijdvak dezelfde procedure volgen als bij het eerste, dan zou er extra tijd moeten liggen tussen het examen en de cesuurbepaling. Dit zou opnieuw als gevolg hebben een verkorting van het laatste cursusjaar met enkele dagen.

b Een theoretische reden. Bij het beoordelen van de resultaten die bij het herexamen zijn behaald, moet men er rekening mee houden dat men nu te maken heeft met een andere populatie dan bij het eerste examen. Men zou dus niet alleen gegevens moeten hebben over de examenresultaten, maar ook over de samenstelling van de tweede populatie in verhouding tot de eerste. Dit maakt het wel erg moeilijk op korte termijn tot een adequate cesuurbepaling te komen.
Kunnen de leerlingen hiervan niet de dupe worden? Onderstel dat er een ernstige misgreep is begaan of dat er een fout in een opgave geslopen is waardoor een leerling gedupeerd kan worden, wat dan? In noodgevallen bestaat de mogelijkheid een beroep op de CEVO te doen. Deze is dan in staat op korte termijn in te grijpen. Gelukkig is dat totnogtoe, althans bij wiskunde, nog nooit nodig gebleken.

5 De toetsmatrijs

In **1** is vermeld dat bij het opstellen van de examenopgaven de toetsmatrijs een rol speelt. Omdat voor sommige lezers deze term een onduidelijke inhoud heeft, tot slot nog een korte explicatie over betekenis en samenstelling van een toetsmatrijs.
Elke examenopgave heeft als doel te toetsen in welke mate de leerling bepaalde *doelstellingen* van het onderwijs bereikt heeft. De doelstelling die in een opgave getoetst wordt, heeft betrekking op een gedeelte van de *leerstof* en op het *gedrag* dat een leerling ten toon moet spreiden om tot de oplossing (*verder op blz. 224*)

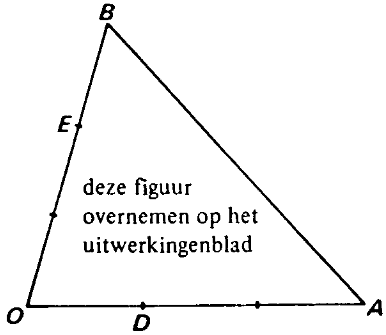
MAVO-D 1984-I

1 De functies f en g zijn gedefinieerd door $f(x) = -\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$ en $g(x) = -x^2 + 2x - 2$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in A en B.
a. Bereken de coördinaten van A en B.
b. Teken de grafieken van f en g in één figuur.
c. Bij de translatie $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ worden A en B afgebeeld op A' en B'. Voor welke p liggen A' en B' beide in een zelfde kwadrant?

2 Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 13$, $BC = 8$ en $CG = 6$. M is het midden van het lijnstuk BG.
a. Bereken HM.
Op de ribbe AB ligt een punt P zo dat $AP = x$.
b. Neem $x = 1$ en bereken $\angle HPM$ in graden nauwkeurig.
c. Bereken voor welke x geldt $\tan \angle AHP = \tan \angle BMP$.

3 In een rechthoekig assenstelsel Oxy zijn gegeven de cirkel $c: (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 5$ en de lijn $l: y = 2x + 6$.
a. Teken c en l.
Bereken de coördinaten van de snijpunten van c en l.
Bij spiegeling in de lijn $y = x + 2$ is c' het beeld van c en l' het beeld van l.
b. Teken c' en geef een vergelijking van c'.
Teken l' en geef een vergelijking van l'.
c. Voor welke p heeft de lijn $x = p$ twee verschillende snijpunten met de cirkel c?

4 Gegeven is $\triangle OAB$ met $\vec{OA} = 3\vec{a}$ en $\vec{OB} = 3\vec{b}$.
Voor de punten D en E geldt $\vec{OD} = \vec{a}$ en $\vec{OE} = 2\vec{b}$.
Op het lijnstuk AE ligt een punt S zo dat $AS : SE = 6 : 1$.
a. Druk $\vec{EA}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Druk $\vec{ES}$ uit in $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
b. Toon aan dat de punten B, S en D op één lijn liggen.
c. Bereken de verhouding van de oppervlakten van $\triangle ODE$ en $\triangle OAB$.



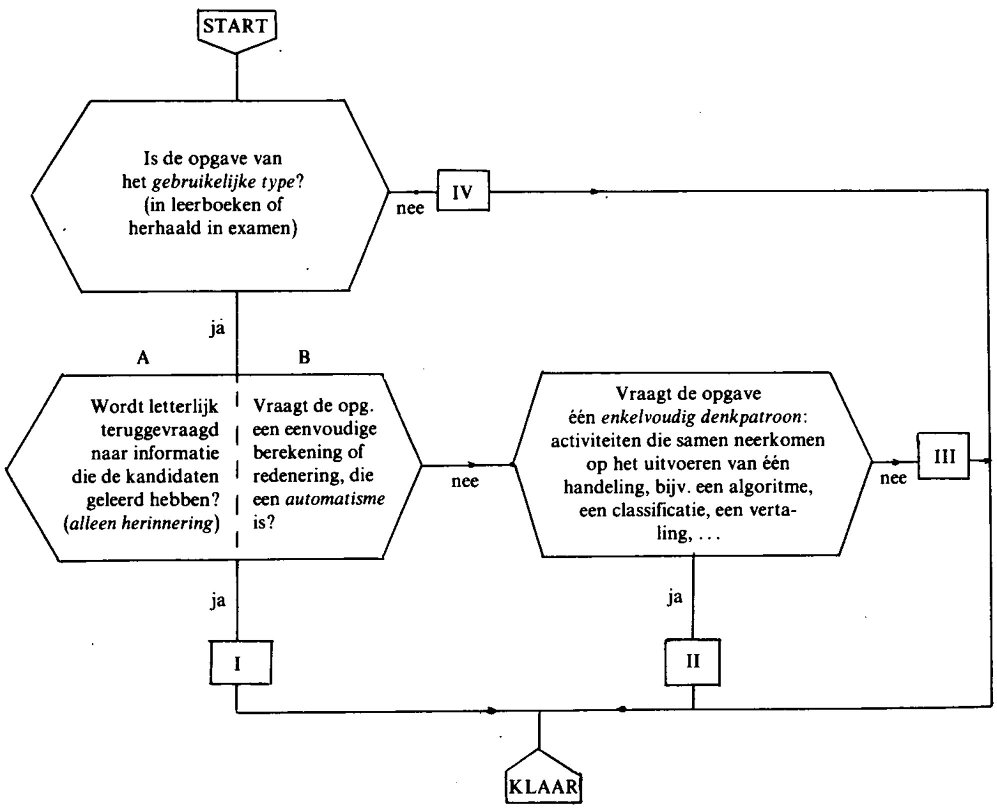
TOETSMATRIJS MAVO-D 1984-I

LEERSTOF COMPONENTEN \ GEDRAG COMPONENTEN	Gebruikelijk type opgave: lett. geleerd autom. hand. I	Gebruikelijk type opgave: enkelvoudig denkpatroon II	Gebruikelijk type opgave: samengesteld denkpatroon III	Niet gebruikelijk type IV	punten	totaal
I Func. verg. ong. 1A constante						
B 1e graad		1 ab 2 2	2 c 4		8	
C 2e graad		1 ab 5 5			10	18
II Rel. 6A 1e graad		3 ab 3 3	3 c 2		8	
B parabool						
C cirkel		3 ab 6 2	3 c 2		10	
D vlakdelen						18
III Afb. 8 R,T,S,V		3 b 3		1 c 8	11	11
IV Vect. 10A met kent.						
B meetkundig		4 a 7	4 b 9		16	16
V Metr. 13A lengte afst. R_2						
B „ R_3		2 ab 5 3			8	
14A omtr. opp. inh. R_2				4 c 6	6	
B „ R_3						
15A gonio R_2				4 c 1	1	
B „ R_3		2 b 5	2 c 5		10	25
VI Fig. 16 Eig.vl.fig.			3 c 2		2	2
VII Stat. 18 Beschr.stat.						
Totaal		51	24	15		90

van die opgave te komen. Een goed examen moet *evenwichtig* verdeeld zijn over de leerstof en over de gedragingen. Om bij een examen evenwichtigheid met betrekking tot deze twee componenten (zgn. validiteit) te verkrijgen, is het gebruik van een toetsmatrijs aan te bevelen. Hiervoor is bij wijze van voorbeeld het examen en de toetsmatrijs van het examen open vragen mavo-D 1984, eerste tijdvak, afgedrukt.
Langs de verticale as zijn de leerstofcomponenten afgezet en langs de horizontale de gedragscomponenten. De leerstofcomponenten spreken voor zich. De gedragscomponenten vereisen nadere toelichting. Deze is gegeven door middel van het stroomschema in figuur 1.

Per cel is aan de hand van het bindende correctievoorschrift het aantal punten vermeld dat aan de betreffende opgave-onderdelen maximaal toegekend kan worden. Zo ziet men dat leerstofcomponent IB en gedrag II voorkomt in de onderdelen 1a en 1b en dat bij 1a en bij 1b daarvoor 2 punten gescoord kon worden. Als een onderdeel in meer dan één cel voorkomt, zijn de scorepunten naar evenredigheid verdeeld.
Beziet men de matrijs, dan ziet men dat het examen redelijk goed verdeeld is over de gehele stof. Verder geeft de verdeling van de punten over de kolommen I-IV een indruk van de mate van complexiteit en originaliteit van de opgaven.

De redactie

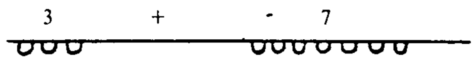


Figuur 1

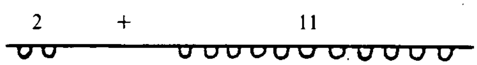
'In de wiskundeles'* De commutatieve eigenschap

P. W. van den Brink

Om 6 uur 's ochtends kroop mijn toen vijfjarige zoon Gijs bij me. Ik lag te slapen in de schipperskooi van mijn Deense zeilkotter de van Brakel. Voor de kooi hing een gordijnroede met een aantal nylon glijders maar zonder gordijn. Gijs begon met de glijders te spelen. Kennelijk legde hij de associatie met een telraam want hij wekte mij en vroeg me om sommetjes met hem te doen. Je vader is tenslotte niet voor niets wiskundige. Ik schoof slaperig twee groepjes glijders bij elkaar en vroeg: 'Hoeveel is drie plus zeven?'



Gijs begon te tellen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ik merkte op dat dat goed was maar dat het wel handiger kon. Uit de vraag 'hoeveel is drie plus zeven?' volgt al dat het eerste groepje drie glijders bevat. Je hoeft dus slechts verder te tellen: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Gijs begreep dat prima en paste dit principe feilloos toe bij enkele volgende opgaven. Toen vroeg ik hem: 'Hoeveel is twee plus elf?'



Gijs telde weer: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Ik prees hem maar vroeg meteen: 'Is dat nu handig, kun je het niet veel eenvoudiger doen?' Hij keek eens naar de rail met glijders en zei: 'Ja natuurlijk, 12, 13.' Op dat moment had Gijs de *commutatieve eigenschap* ontdekt die hij bij verdere opgaven handig wist toe te passen. Ongetwijfeld hangt het gemak waarmee hij het van links naar rechts tellen verving door van rechts naar links tellen samen met het feit dat hij nog niet kon lezen. Kortom, hoe eerder men kinderen dergelijke abstracte eigenschappen bijbrengt, hoe beter. Ze zijn dan nog in staat om, ongehinderd door allerlei ingeroeste gewoonten, regels als de commutatieve eigenschap op hun juiste waarde te schatten.
Maar wanneer ik bij de behandeling van de commutatieve eigenschap in de klas dit verhaal vertel zijn de leerlingen ook enthousiast. Ze begrijpen plotseling de zin van zo'n eigenschap waar ze gewoonlijk hun neus voor ophalen omdat ze er allang aan gewend zijn. Verdere toelichting met behulp van de axioma's van Peano wordt nu ook goed ontvangen.
Tot slot, het initiatief ging uit van Gijs. Ik ben geen Piaget die experimenten met zijn kinderen uitvoert.

Over de auteur:
Van den Brink is werkzaam in de methodenleer aan het psychologisch laboratorium van de Universiteit van Amsterdam.

* Prijsvraag, zie Euclides 60, nr. 1, blz. 81.

Boekbespreking

Manfred Andrié/Paul Meier, *Analysis*, Hochschultaschenbücher Band 602, 257 blz., DM 16,80.

In dit boekje wordt de elementaire differentiaal- en integraalrekening voor reële functies van een reële variabele behandeld. Het is geschreven voor studenten in de technische wetenschappen, en vrijwel alle voorbeelden zijn dan ook uit de techniek afkomstig. De theoretische achtergronden worden op de gebruikelijke wijze gepresenteerd en aannemelijk gemaakt. Het boek bevat geen opgaven.
De tekst is niet gezet maar getypt. Ondanks de zorg waarmee dat is gebeurd, brengt het pocketboekformaat met zich mee dat er hierdoor een onrustige en onoverzichtelijke bladspiegel is ontstaan.

J. van de Craats

Verslag Examenbesprekingen lbo/mavo-C en mavo-D wiskunde 1984

F. F. J. Gaillard, L. Bozuwa

Op 15 mei 1984 zijn in 21 plaatsen de jaarlijkse examenbesprekingen voor lbo en mavo gehouden. Het totaal aantal bezoekers bedroeg 816 waarvan 328 leden van de NVvW. Voor het lbo kwamen 138, voor het mavo (C en D) 665 en alleen voor mavo-D 13 docenten. Hengelo trok de meeste (72), Deventer het kleinste aantal (22) bezoekers.

Lbo/mavo-C wiskunde 1984

Algemene opmerkingen

Elk jaar ziet men de gevolgen van de tweedeling: lto/mavo enerzijds en het overig lbo (leao, lhno, llo, lmo) anderzijds. De eerste groep maakt zich zorgen over het niveau van het examen en vreest aansluitingsproblemen met het mto. Het gevaar bestaat dat het mto wiskunde een D-programma zal gaan eisen voor toelating. Daarmee zouden lto-leerlingen in een voor hen nadelige situatie terecht komen. De tweede groep is min of meer tevreden over het niveau van het centraal schriftelijk examen.

Men pleit voor een duidelijk verschil tussen het wiskunde C-programma en het D-programma. In het mavo wordt over het algemeen opgeleid volgens een D-programma. Leerlingen die het niveau niet halen doen C-examen. Dit kan problemen geven omdat de kandidaat niet expliciet hiervoor is opgeleid.

Algemeen is men van mening dat er een goed C- en D-programma moet komen. De doorstroming van leerlingen naar een hogere vorm van onderwijs moet daarbij veilig gesteld zijn. Lbo-scholen moeten bereid zijn voldoende lessen beschikbaar te stellen om het C-examen te kunnen halen.

De plaats van wiskunde in het examenrooster gaf nogal wat kritiek. Men ziet wiskunde liever eerder geplaatst en de open vragen voor de meerkeuze vragen.

Als er één zitting komt dan mag het examen niet uitsluitend uit gesloten vragen bestaan. Over het algemeen denkt men dat het nuttig is de examenbesprekingen voort te zetten na 1985.

De meerkeuze vragen van dit jaar vroegen teveel tijd.

Voor wat de open vragen van dit jaar betreft leest men dat

- er teveel met breuken gerekend moest worden;
- er te weinig vragen in een vraagstuk waren, waardoor de stappen te groot werden;
- de tekening niet gewaardeerd werd;
- de tekening niet gegeven werd;
- er geen statistiek gevraagd werd;
- de eerste opgave te zwaar was;
- de volgorde van de vraagstukken ongelukkig was;
- er weer problemen waren over de interpretatie van 'toon aan';
- soms leerlingen onvoldoende gedwongen werden een antwoord te verantwoorden;
- niet duidelijk was wanneer er een berekening moest worden gegeven of volstaan kon worden met het aflezen uit de tekening.

LBO/MAVO-C 1984-I

1 Gegeven zijn de functies $f: x \to x^2 - 6x + 9$
en $g: x \to -x^2 + 4x - 3$.
 a. Toon aan dat de grafieken van f en g elkaar snijden in $(2, 1)$ en $(3, 0)$.
 b. Teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel Oxy.
 c. Teken de grafiek van g in hetzelfde assenstelsel.
 d. Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) \geqq g(x)$.

2 In een rechthoekig assenstelsel Oxy zijn gegeven $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ en $C(4, 7)$.
 a. Toon aan dat $\triangle ABC$ gelijkbenig is.
 Verder zijn gegeven $D(4, 4)$, $E(0, 2)$ en $F(-2, -2)$.

b. Bij een vermenigvuldiging is $\triangle DEF$ het beeld van $\triangle ABC$. Noteer van deze vermenigvuldiging: de coördinaten van het centrum; de factor.
c. De lijn CF heeft als vergelijking $y = px + q$. Bereken p en q.

3 In een rechthoekig assenstelsel Oxy zijn gegeven de lijnen $l: y = \frac{1}{4}x + 1$ en $m: y = -x + 3\frac{1}{2}$.
Het punt S is het snijpunt van l en m.
a. Bereken de coördinaten van S.
b. Teken l en m in het assenstelsel.
c. Bereken OS.
d. Bij rotatie om O is het punt $(p, 0)$ het beeld van S. Welke waarden kan p hebben?

4 Gegeven is de kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe 6. Op het verlengde van het lijnstuk AB aan de kant van B ligt het punt P zo dat $BP = 3$.
a. Bereken de omtrek van $\triangle AHP$ in één decimaal nauwkeurig.
b. Bereken de oppervlakte van $\triangle BHP$ in één decimaal nauwkeurig.
c. Het lijnstuk HP snijdt het lijnstuk BG in het punt Q.
Toon aan dat $BQ = \frac{1}{3}AH$.

Reacties op de opgaven

Opgave 1
Normering goed, niveau juist, redactie goed. Deze opgave had niet als eerste geplaatst moeten worden. Beginnen met twee tweedegraads functies is wel wat veel van het goede. Bij b en c wordt hetzelfde getoetst. Mag men bij het tekenen van een mal gebruik maken? Onderdeel d is duidelijk te moeilijk. Tweedegraads ongelijkheden behoren niet tot het examenprogramma. Geef liever de formulering: 'voor welke waarden van x geldt'. Als de kandidaat $f(x) \leqq g(x)$ gelezen heeft, dan dient hij voor het vinden van de grenswaarden het maximale aantal punten te krijgen.

Opgave 2
Normering te streng (onevenwichtig), niveau juist, redactie goed. Met de lay-out van b was niet iedereen gelukkig.
Het gevaar bij deze opgave is dat als men één of meer punten verkeerd tekent, de hele opgave onoplosbaar wordt met uitzondering misschien van c. Vrij veel kandidaten trekken conclusies uit zaken die zij niet zeker weten. Gemeten lengte van lijnstukken, middelloodlijn van de zijde AC door B, lijn CF door punt $(0, 1)$.
De kandidaat weet niet goed wat wel of niet aangenomen mag worden, te meer daar bij enkele onderdelen van de opgave uit de tekening mag afgelezen worden. Bij c vindt men het inconsequent dat p en q berekend moeten worden, terwijl lijnen met vergelijking $y = px + q$ zonder toelichting getekend mogen worden. Er wordt op gewezen dat bij c wel gebruik gemaakt mag worden van $(1, 2\frac{1}{2})$, daar b impliceert dat dit punt op de lijn CF ligt.

Opgave 3
Normering goed (in 3c onduidelijk), niveau juist, redactie goed. Een enkeling vond dat er een ongewenste stapeling in de opgave zit. De verdeling bij c: $OS = 2\frac{1}{2}$ 2 punten en motivering 3 punten, vond men vreemd. Beter zou zijn: berekening OS 5 punten. Het constateren bij d dat $(p, 0)$ op de x-as ligt is afhankelijk van de goodwill van de examinator en de tweede corrector; het is een gegeven. Een betere vraagstelling had dat kunnen voorkomen. Lbo-leerlingen weten met de vraag geen raad. Zij vermelden de getallenparen in plaats van de waarden van p. Men heeft er moeite mee dat dat het volle aantal punten zou opleveren.

Opgave 4
Normering goed, niveau juist (10% te hoog), redactie goed. Als de tekening niet gewaardeerd wordt, is wellicht een gegeven tekening een middel om alle kandidaten een correcte start te verschaffen. Bij een verkeerd gekozen P wordt het moeilijk a en b redelijk te waarderen, bij c zijn dan geen punten meer te behalen. Gelijkvormigheid is zo'n klein onderdeel van de stof dat de kans dat leerlingen daar over struikelen erg groot is. Volgens de normering hoeft men geen verantwoording voor gelijkvormigheid te geven. Dit is niet in overeenstemming met de eisen die men bijvoorbeeld in 2a stelt. Nogal wat deelnemers vonden 4c te moeilijk en de normering niet duidelijk genoeg.

Mavo-D wiskunde 1984

Algemene opmerkingen
De meest gehoorde klacht was dat het wiskunde-examen open vragen weer als laatste vak achter aan het examen bungelde. Heeft het CITO echt meer tijd nodig dan de wiskundecollega's die door deze planning behoorlijk in tijdnood raken? Wordt er wel rekening gehouden met het feit dat de kandidaten aan het eind van hun examenperiode vermoeid raken en zich minder goed kunnen concentreren? Bij veel leraren bestaat de indruk dat de welgemeende, opbouwende kritiek die tijdens deze besprekingen over het examen geleverd wordt, in de prullebak verdwijnt.

Het examen werd als moeilijk ervaren. Elk vraagstuk op zich zou aanvaardbaar geweest zijn als moeilijkste vraagstuk van het examen, maar deze combinatie, drie van de vier kregen het predikaat lastig (de minste moeite had men met vraagstuk 3), zorgde ervoor dat het examen in zijn geheel als moeilijk gekwalificeerd werd. Dat kwam vooral door de c-vragen en de vaak te zware normering hiervan. Ook het vele rekenwerk met breuken werkte mee aan die verzwaring. Daar komt bij dat, zeker in vergelijking met veel andere vakken, de meeste leerlingen hun tijd hard nodig hadden. Er werd zelfs gesproken van een kwalijke tijdsdwang op de prestaties van de leerlingen.
Een andere veel gehoorde opmerking was, dat er meer duidelijkheid moet zijn voor de leerlingen over wat er van hen verwacht wordt. Als het antwoord uit de tekening mag worden afgelezen, moet dat er expliciet bij vermeld worden. Juist goede leerlingen kwamen vaak in de problemen, omdat ze vastliepen in onnodige berekeningen, of dat die hen te veel tijd kostten. Ook b.v. duidelijk schrijven 'bereken' als er berekend moet worden.
Ook in dit examen kwamen er weer dubbelvragen voor. Het argument dat dit gedaan wordt om een betere puntenverdeling per onderdeel tot stand te brengen, spreekt de leraren niet zo erg aan. Het nare gevolg dat leerlingen de laatste vraag van zo'n onderdeel vergeten, moet huns inziens zwaarder wegen.
Toch zijn velen ervan overtuigd dat het huidige niveau gehandhaafd moet blijven. Er wordt geconstateerd dat te veel leerlingen die het eigenlijk niet aankunnen, toch wiskunde kiezen onder drang van de vervolgopleidingen.
Sommigen pleiten voor het gebruik van een mal bij het tekenen van parabolen.
Over het meerkeuzewerk werden en passant twee opmerkingen gemaakt: door de lay-out hebben verschillende leerlingen vergeten de laatste twee opdrachten te maken en ook voor dit werk kwamen de meeste leerlingen in tijdnood.
Nog wat getallen: 60% van de leraren vond het niveau (te) hoog, 40% vond het juist. 75% vond de beschikbare tijd te kort.

Reacties op de opgaven (de opgaven staan op bladzijde 222 van dit nummer vermeld)

Opgave 1
Liever in het begin niet zoveel breuken, ook combinatie breuken en bergparabool levert moeilijkheden op. Er was, vonden enkelen, sprake van een zekere stapeling.
Vermeld had moeten worden dat uit de tekening afgelezen mocht worden.
In de normering werden te veel punten aan onderdeel c gegeven. 'Voor welke waarde(n) van p' zou duidelijker geweest zijn dan 'voor welke p'.
In vraag c gaf de redactie soms wat onduidelijkheid.
10% vond de normering (te) streng.
20% vond het niveau (te) hoog.

Opgave 2
De afmeting 13 is niet zo praktisch, leerlingen gaan twijfelen over de schaal waarop getekend moet worden.
Onderdeel c kreeg te veel punten in de normering. Liever eerst $AP = 1$ en dan $AP = x$. Of eerst: druk tan $\angle BMP$ uit in x. Beter: 'Voor welke waarde(n) van x'.
Onderdeel b is geen opstapje voor c, want er worden andere hoeken gevraagd.
Het niveau van vraag c is te hoog.
15% vond de normering te streng.
30% vond het niveau (te) hoog.

Opgave 3
Meer vragen per onderdeel werkt in de hand dat leerlingen een stuk vergeten.

Er moet te veel met de tekening gedaan worden.
Liever eerst berekenen en dan tekenen in vraag a.
Duidelijk vermelden dat afgelezen mag worden.
Het correctievoorschrift van één opgave liever niet op twee verschillende pagina's.
100 % vond de normering goed.
100 % vond het niveau juist.
5 % vond de redactie moeilijk.

Opgave 4
Deze opgave werd te moeilijk gevonden.
Men vond de tekening te klein; waarom moest die ook nog overgenomen worden? Zou een werkblad een idee zijn?
Onderdeel b werd overgewaardeerd.
Bij c zou misschien een introductie wenselijk geweest zijn, b.v. vragen naar de verhouding van de bases en van de hoogten.
Sommigen vonden het een wezensvreemde vraag, anderen hadden liever gezien dat er gesproken was over 1/7 i.p.v. 6 : 1, of misschien was $AE : AS = 7 : 6$ beter?
Enkelen hadden moeite met $OA = 3a$, misschien was $OD = a$ beter geweest zijn?
15 % vond de normering te streng.
50 % vond het niveau te hoog.
10 % vond de redactie te moeilijk.

Bovenstaande opmerkingen zijn niet alle even belangrijk. Sommige zijn zelfs met elkaar in tegenspraak, omdat niet iedereen eensluidend denkt. Toch zou ik de leden van de CEVO willen verzoeken goede nota te nemen van wat de leraren te berde brengen. Het zijn opmerkingen van mensen uit het veld die zo gemotiveerd zijn dat ze in hun vrije tijd bij elkaar komen om deze zaken te kunnen bespreken.
Voor de mavo-leerlingen is het heel belangrijk dat er duidelijkheid bestaat over wat er van hen gevraagd wordt. Er kan niet kritisch genoeg naar een examentekst gekeken worden met in het achterhoofd de gedachte: begrijpt een leerling nu wat er van hem verwacht wordt?
Zouden deze besprekingen nog zin hebben als het wiskunde-examen alleen in objectief scoorbare vorm zou worden afgenomen? Deze vraag hebben we de aanwezigen gesteld. Ongeveer de helft antwoordde bevestigend.

Boekbespreking

Peter Janich (Hrsg.), *Methodische Philosophie*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 127 blz., DM 29,80.

Het boek draagt de ondertitel: 'Beiträge zum Begründungsproblem der exakten Wissenschaften in Auseinandersetzung mit Hugo Dingler'. Samengesteld naar aanleiding van de honderdste geboortedag van Hugo Dingler in 1981, handelt het over het onderzoek van grondslagen van exacte wetenschappen. Vooral in het Duitse taalgebied zijn er de laatste tijd enige zeer belangwekkende studies op dit terrein verschenen. Wat betreft de wiskunde kan ik hier wijzen op recente publicaties van bijv. P. Lorenzen en R. Inhetveen. Het grondslagenonderzoek van m.n. de constructieve meetkunde staat hierbij in het centrum van de belangstelling. Het boekje waar het in deze bespreking om gaat heeft iets ruimere kaders dan alleen de wiskunde. Voor een goed begrip is dit wél zo aardig. Het geheel bestaat uit bijdragen van een aantal schrijvers:
Jürgen Mittelstrass: Gibt es eine Letztbegründung?
Friedrich Kambartel: Analysen zur Komplexität und Ordnung unserer Handlungen.
Jörg Willer: Vermuten is von Wissen weit entfernt.
Wilhelm Krampf: Hugo Dinglers Philosophiebegriff.
Gereon Wolters: Früher Konventionalismus: Der Carnap-Dingler Briefwechsel.
Rüdiger Inhetveen: Die Rolle der Eindeutigkeit in der Philosophie Hugo Dinglers.
Holm Tetens: 'Der Glaube an die Weltmaschine'. Zur Aktualität der Kritik Hugo Dinglers am physikalischen Weltbild.
Paul Lorenzen: Neue Grundlagen der Geometrie.
Peter Janich: Hugo Dingler, die Protophysik und die spezielle Relativitätstheorie.
In deze bijdragen belichten de schrijvers de problematiek van de grondslagen van de logica, de meetkunde en de natuurkunde vanuit een confrontatie met de huidige stand van de methodische filosofie der exacte wetenschappen. Daarbij komen uiteraard eveneens algemeen filosofische aspecten, alsmede de relatie tot de filosofie van Dingler naar voren. Nieuwe inzichten tegenover historische verworvenheden leiden daarbij tot zeer actuele artikelen. Ik kan het boekje van harte aanbevelen aan al diegenen die geïnteresseerd zijn in het grondslagenonderzoek van de wiskunde, de logica en de natuurkunde.

W. Kleijne

Kwadraatafsplitsen

Ir. R. Leentfaar

In zijn artikel van maart 1984 Euclides 59, nr. 7, blz. 320 heeft Hans Aalmoes het o.a. over kwadraatafsplitsen.

'Transformatiemeetkunde' is ook heel goed te gebruiken bij algebraïsche grafieken:

1 De grafiek van $y = (x-2)^2$ ontstaat uit die van $y = x^2$ door een translatie $T(2, 0)$ ('om dezelfde y te krijgen moet je de x 2 groter nemen').

2 De grafiek van $y = 2x^2$ ontstaat uit die van $y = x^2$ door een lijnvermenigvuldiging met 2 t.o.v. de X-as (alle y-waarden worden immers 2 keer zo groot).
N.B. Dit is didaktisch aantrekkelijker dan een puntvermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ t.o.v. de oorsprong.

3 De grafiek van $y = 2(x-2)^2 + 8$ ontstaat aldus uit die van $y = x^2$ door $T(0,8) \circ V_{X\text{-as},2} \circ T(2,0)$ ($T(0,8)$ want alle y-waarden worden immers 8 groter).
N.B. $V_{X\text{-as},2} \circ T(0,4) \circ T(2,0) = V_{X\text{-as}} \circ T(2,4)$ lijkt me, hoewel goed, sterk af te raden!

Door e.e.a. wordt m.i. het inzicht vergroot, dat 'dit soort grafieken' allemaal de parabool-vorm hebben. De leerling begrijpt dat na enige tijd, en ook, dat je $y = 2(x-2)^2 + 8$ om kunt werken tot $y = 2x^2 - 8x + 16$. Met enige moeite begrijpt hij/zij ook, dat als je zo'n 2e-graadsvorm 'terug' om kunt werken naar zo'n 'kwadraat plus getal'-vorm, je dan ook weet, dat een 2e graadsgrafiek altijd weer 'zo'n grafiek' wordt.

Maar nu het kwadraatafsplitsen zelf:

a $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$

b $x^2 - 3x + 5 = (x - 1\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} + 5 = (x - 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4}$

Met deze voorbeelden hebben de leerlingen na enige oefening niet zoveel moeite.

Veel meer moeite hebben zij met:

I $y = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x^2 - 4x) + 16 = 2(x^2 - 4x + 4) - 2 \cdot 4 + 16 = 2(x-2)^2 + 8$

II $y = 3x^2 - 18x + 32 = 3(x^2 - 6x) + 32 = 3(x^2 - 6x + 9) - 3 \cdot 9 + 32 = 3(x-3)^2 + 5$

III $y = -x^2 + 3x - 5 = -(x^2 - 3x) - 5 = -(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} - 5 = -(x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{3}{4}$

Daarom deed ik het zó:

I $y = 2x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = x^2 - 4x + 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = (x-2)^2 - 4 + 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = (x-2)^2 + 4 \Leftrightarrow y = 2(x-2)^2 + 8$

Het kwadraatafsplitsen gaat aldus rechttoe, rechtaan, d.w.z. *altijd* met een vorm, die begint met $1 \cdot x^2 \ldots$

Bovendien blijken de meetkundig benodigde handelingen t.a.v. de grafiek overduidelijk uit de berekening:

$$T(0,8) \circ V_{X\text{-as},2} \circ T(2,0)$$

Op dezelfde manier gaan:

II $y = 3x^2 - 18x + 32 \Leftrightarrow \frac{1}{3}y = x^2 - 6x + 10\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}y = (x-3)^2 - 9 + 10\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}y = (x-3)^2 + 1\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = 3(x-3)^2 + 5$

III $y = -x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow -y = x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow -y = (x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 5 \Leftrightarrow -y = (x - 1\frac{1}{2})^2 + 2\frac{3}{4} \Leftrightarrow y = -(x - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{3}{4}$

(Begrijpen we zo ook weer niet beter, dat je eerst moet kwadrateren, en dan pas 'die min'?)

Tegen mijn leerlingen zei ik pas nog, dat het nadeel van de methode was (zie $y = 3x^2 - 18x + 32$) dat je eerst, die 32 door 3 deelde en later een soortgelijk getal weer met 3 vermenigvuldigde. Eigenlijk snapten ze dat toen niet zo goed, en ik heb het toen maar even laten zitten. Overigens vonden zij het een prima methode, en die kon volgens hen dus moeilijk nadelen hebben.

Wat ik kennelijk bedoeld had te zeggen, was dit: Die 32 deel je eerst door 3, en later vermenigvuldig je er weer mee. Dan moet het toch mogelijk zijn, die 32 even apart te zetten? Voortaan doe ik het dus maar zó: (ik neem een heel 'akelig' voorbeeld).

Gevraagd: splits een kwadraat af bij $y = -5x^2 - 6x - 10$

Oplossing: We doen eerst $y = -5x^2 - 6x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}y = x^2 + \frac{6}{5}x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}y = (x + \frac{3}{5})^2 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow y = -5(x + \frac{3}{5})^2 + \frac{9}{5}$

Er geldt dus $y = -5x^2 - 6x - 10$ (10 eraf!) $= -5(x + \frac{3}{5})^2 + \frac{9}{5} - 10 = -5(x + \frac{3}{5})^2 - 8\frac{1}{5}$

Je krijgt de grafiek van $y = -5x^2 - 6x - 10$ dan ook uit die van $y = x^2$ door

$T(0, -8\frac{1}{5}) \circ S_{X\text{-as}} \circ V_{X\text{-as},5} \circ T(-\frac{3}{5}, 0)$

Slotopmerking

Natuurlijk doe ik niets anders dan 'ouderwets' kwadraatafsplitsen, alleen de didaktische winst is tweeërlei:

1 I.p.v. die -10 apart te zetten, laat ik hem tijdelijk helemaal weg.

2 En *dat* maakt het mogelijk, door -5 te delen, waardoor je m.i. beter begrijpt, dat verderop die $-\frac{9}{25}$ ook nog maal -5 moet!

P.S.

Hoe krijgt u de grafiek van $x \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ uit die van $x \rightarrow \sin x$?

$V_{Y\text{-as},\frac{1}{2}} \circ T(\frac{\pi}{3}, 0)$ vind ik persoonlijk prettiger dan $T(\frac{\pi}{6}, 0) \circ V_{Y\text{-as},\frac{1}{2}}$.

M.a.w. het bovenstaande heeft ook van alles te maken met het afleiden van grafieken uit standaardgrafieken. Het lijkt me dus prima om daar bij de 2e-graadsfuncties al duchtig op in te spelen. In dezelfde categorie valt m.i.

$(\frac{1}{3})^x < \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{-x} < 3^{-3} \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3$, waardoor je de stelling over $(\frac{1}{3})^x$ niet eens hoeft te kennen, wel die over 3^x: Het gaat weer over transformaties, de grafiek van 3^{-x} is het beeld van die van 3^x bij $S_{Y\text{-as}}$, en dan wordt dalend stijgend, links wordt rechts, enz.

Boekbespreking

Herbert Meschkowski, *Georg Cantor, Leben, Werk, Wirkung*, Bibligraphisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 2., erweiterte, Auflage, 1983, XVI + 316 blz., DM 56,–.

Cantor (1845-1918) is vooral beroemd geworden door zijn fundering van de verzamelingenleer. Daarnaast heeft hij baanbrekend werk verricht op het gebied van de reële getallen (fundamentaalrijen) en de topologie in R_1 en R_2.

Meschkowski laat aan de hand van een briefwisseling tussen Cantor en Dedekind uit 1873-74 zien, hoe bij Cantor de notie aftelbare verzameling rijpt. Veel verzamelingen blijken aftelbaar, o.a. de verzameling van de algebraïsche getallen. Echter niet alle. Hij bewijst in 1873 reeds dat de verzameling van de reële getallen niet aftelbaar is. Vervolgens bewijst hij de in zijn tijd paradoxale stelling dat het mogelijk is een lijnstuk omkeerbaar eenduidig af te beelden op een vierkant en meer algemeen op een continu gebied in ρ dimensies. Het is boeiend te lezen hoe deze eerste beginselen van de verzamelingenleer tot stand kwamen.

De schrijver geeft vervolgens een uitvoerig verslag van alles wat door Cantor in de jaren 1873-1899 tot stand gebracht is. We zien hoe ongebreideld stijgende kardinaalgetallen ontstaan. Verder creëert Cantor de typen geordende verzamelingen, definieert hij welgeordende verzamelingen en komt dan weer tot ongebreideld stijgende ordinaalgetallen. De stelling die zegt dat elke verzameling welgeordend kan worden, is niet van hem afkomstig, maar eerst bewezen door Zermelo (1904).

Cantor heeft van zijn tijdgenoten veel tegenkanting ondervonden. Geen wonder. Een hecht wiskundig fundament van zijn theorie ontbrak. Moeilijker verteerbaar was dat hij wel een andersoortig fundament aan zijn theorie gaf. Aan verzamelingen en kardinaalgetallen kende hij een metafysische existentie toe. Het waren geen abstracties maar realiteiten. Hij aanvaardde de existentie van een absoluut oneindige. Wiskunde werd zo verbonden met metafysica en zelfs met theologie. De kardinaalgetallen zijn voor hem 'etwas Heiliges', 'die Stufen die zur Throne Gottes emporführen' (p. 124). Men moet hierover niet al te verbaasd zijn. In Cantors tijd was het nog gebruik wiskunde en realiteit niet te scheiden.

Cantor heeft zelf al gezien dat zijn theorie niet vrij van tegenstrijdigheden (antinomieën) is. Zo zag hij dat het grootste kardinaalgetal dat was van de verzameling van alle verzamelingen, terwijl anderzijds bij elk kardinaalgetal een groter geconstrueerd kon worden. Hij was er niet van onder de indruk. Het geheel van alle verzamelingen was blijkbaar geen verzameling maar een inconsistente veelheid.

Behalve een inzicht in de gedachtenwereld van Cantor geeft het boek ons ook een indruk van zijn persoon. Hij was een gevoelig mens, geneigd om alles (met name kritiek) zwaar op te nemen en daardoor in een depressieve toestand te geraken. Zie hiervoor met name de brieven 6-8. De laatste fase van zijn leven is dan ook improduktief geweest.

Tot slot trekt de schrijver Cantors werk door naar de moderne tijd en laat zien hoe in de huidige verzamelingenleer de door Cantor gevonden resultaten mathematisch gefundeerd worden. Ik kan de lezing van dit zeer interessante boek ieder aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

De 23ste Nederlandse Wiskunde Olympiade 1984

H. N. Schuring

De eerste ronde

Op vrijdag 6 april 1984 is de eerste ronde gespeeld. Aan alle scholen voor havo en vwo is verzocht leerlingen van niet-eindexamenklassen in de gelegenheid te stellen hieraan mee te doen. Gedurende 3 uur konden de deelnemers proberen 13 opgaven op te lossen. Alleen goede antwoorden telden mee. Het maximaal te behalen puntenaantal was 36.
De wedstrijdleiders van 177 scholen hebben het uitslagenformulier tijdig opgestuurd, zodat het resultaat van 1875 deelnemers in onderstaand overzicht verwerkt kon worden.

score	frequentie	cumulatieve frequentie
33	1	1
32	0	1
31	0	1
30	0	1
29	1	2
28	2	4
27	2	6
26	2	8
25	0	8
24	7	15
23	4	19
22	5	24
21	7	31
20	11	42
19	9	51
18	11	62
17	17	79
16	20	99
15	31	130
14	33	163
13	30	193
12	43	236
11	63	299
10	61	360
9	91	451
8	83	534
7	129	663
6	120	783
5	151	934
4	194	1128
3	102	1230
2	330	1560
0	315	1875

De cesuur is gelegd bij score 16, d.w.z. de deelnemers van niet-eindexamen klassen die 16 of meer punten behaalden, werden uitgenodigd voor de tweede ronde. Van deze 99 deelnemers waren er: 73 leerling van 5 vwo, 21 leerling van 4 vwo, 4 leerling van 4 havo en 1 leerling van 3 vwo.
De wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is op maandag 28 mei 1984 uitgereikt aan de RSG ‘Schoonoord’ te Zeist; de vijf deelnemers behaalden samen 96 punten. De docenten vonden over het algemeen de opgaven van de eerste ronde mooi maar lastig, terwijl de aanbeveling gedaan werd om ook enige eenvoudiger A-opgaven op te nemen, zodat minder begaafde leerlingen ook enige punten kunnen scoren.

De tweede ronde

Op vrijdag 14 september 1984 is te Utrecht de tweede ronde gehouden. De 99 geselecteerde deelnemers van de eerste ronde zijn hiervoor uitgenodigd. Ook kregen 2 deelnemers van de Pythagoras Olympiade, die niet in een eindexamenklas zaten, een uitnodiging. Eén kandidaat was verhinderd zodat 100 deelnemers zich gedurende 3 uur gebogen hebben over de vier opgaven. De maximale score per opgave was 10 punten.

De volgende deelnemers zijn prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1984:

1	Hans van Antwerpen, Nuenen	37 p.
2	Machiel van Frankenhuysen, Nijmegen	36 p.
3	Eric Tjong Tjin Tai, Hardenberg	35 p.
4	Jeroen Hansen, Geldrop	34 p.
5	Ben Moonen, Hoensbroek (Pythagoras)	33 p.
6	Rob Hooft, Utrecht	32 p.
7	Jeroen Nijhof, Borne	31 p.
8	Marcel Monterie, Nieuwkoop	30 p.
9	Willem Brussaard, Dronten	29 p.
10	Klaas van Aarsen, Epe	29 p.

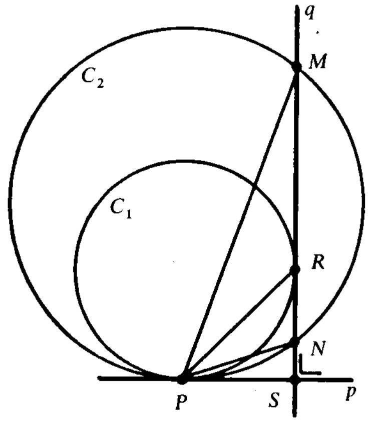
Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.

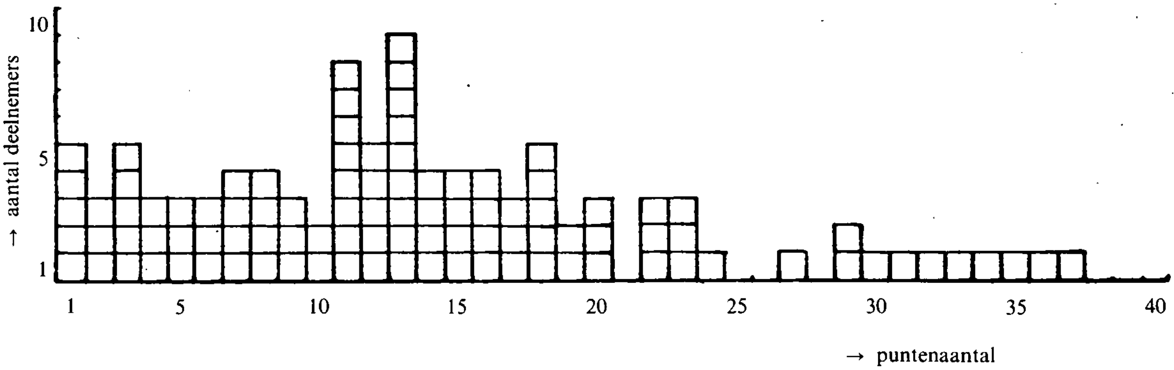
Het werk van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, die jaarlijks de Wiskunde Olympiaden organiseert, is slechts mogelijk dank zij de medewerking en financiële steun van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Wolters-Noordhoff, Educaboek, Philips en Shell.
Tenslotte volgen hierna de opgaven van de tweede ronde 1984.

1 Twee cirkels C_1 en C_2 met stralen r_1 en r_2 raken de lijn p in het punt P. Cirkel C_1 ligt verder geheel binnen cirkel C_2. De lijn q snijdt p loodrecht in het punt S, raakt cirkel C_1 in R, en snijdt C_2 in M en N (N ligt tussen R en S).

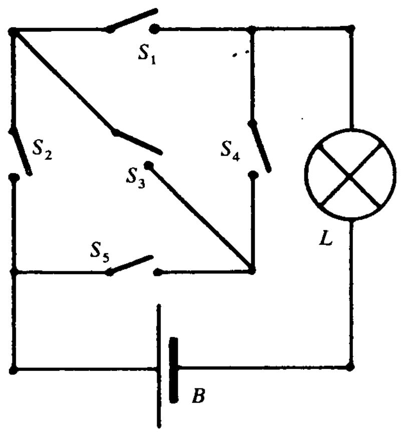
i Bewijs dat de lijn PR de hoek MPN middendoor deelt.

ii Bereken de verhouding $r_1 : r_2$ als bovendien nog geldt dat lijn PN hoek RPS middendoor deelt.





2 Het getekende schakelschema bevat een batterij B, een lampje L en vijf schakelaars S_1 t.e.m. S_5. De kans dat schakelaar S_3 gesloten is (kontakt maakt) is $\frac{2}{3}$, voor de andere vier schakelaars is die kans $\frac{1}{2}$ (de kansen zijn onderling onafhankelijk).
Bereken de kans dat het lampje brandt.



3 Stel $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$ voor $n = 1, 2, \ldots$
Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leqq a_n < \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

4 Door haakjes te plaatsen in de uitdrukking $1 : 2 : 3$ kunnen we twee verschillende getalwaarden krijgen: $(1 : 2) : 3 = \frac{1}{6}$ en $1 : (2 : 3) = \frac{3}{2}$.
Nu worden haakjes geplaatst in de uitdrukking $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8$ en hierbij zijn meerdere paren haakjes toegestaan, al dan niet in 'nestvorm'.
i Wat is de grootste getalwaarde die we dan kunnen krijgen, en wat de kleinste?
ii Hoeveel *verschillende getalwaarden* kunnen verkregen worden?

Boekbespreking

Charles Dixon, *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester, 1981, 147 blz., £ 5,75.

Dit boek, vooral bestemd voor beginnende studenten in de technische wetenschappen, is bedoeld als een eerste kennismaking met een aantal onderwerpen uit de differentiaal- en integraalrekening; hierbij wordt enige voorkennis van de analyse (ongeveer de stof van ons programma wiskunde I) en enig begrip van de vectorrekening bekend ondersteld. De hoofdstukken zijn:

1 Calculus of functions from R to R^n
2 Calculus of functions from R^n to R
3 Extrema of functions from R^n to R
4 Calculus of functions from R^n to R^m
5 Surfaces in space
6 Curvilinear coordinates
7 Multiple integrals
8 Surface integrals

In hoofdstuk 1 komt uiteraard de lengte van een boog aan de orde, in hoofdstuk 2 Taylor-rijen voor functies van R^n naar R, in hoofdstuk 6 poolcoördinaten.
Het boek munt uit door een heldere aanpak van de stof, waarbij er voor gewaakt is dat niet een technische benadering van de problemen verhindert dat de student inzicht heeft in wat hij eigenlijk doet. Hierdoor en door de volgorde van de onderwerpen, de uitgewerkte voorbeelden en de opgaven (met antwoorden achter in het boek) is dit boek zeer geschikt voor zelf-studie. Juist met het oog hierop is het te betreuren dat er nog al wat (druk-)fouten in het boek voorkomen, de eerste al op blz. 2. De eerste opgave op blz. 7 leidt tot een moeilijk te berekenen integraal; uit het antwoord achter in het boek valt echter af te leiden dat een iets andere opgave bedoeld is. Voor degenen die op zelfstudie zijn aangewezen zijn zulke ervaringen niet bemoedigend.
Als dit boek in de leerlingenbibliotheek zou voorkomen, zou het bij die leerlingen, die zich graag in wat extra stof willen verdiepen, zeker interesse wekken in de behandelde materie.

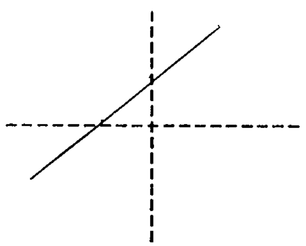
G. M. Hogeweij

'In de wiskundeles'* Grafieken en computers

Iet Markusse

De wiskundeleerlingen in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs leren hoe je van een eerste- of tweedegraads functie de bijbehorende grafiek kunt tekenen. Ze krijgen daarbij veel opdrachten volgens het stramien van: hier is een functievoorschrift, teken de bijbehorende grafiek. Na verloop van tijd kennen ze alle vereiste handelingen en de grafiek komt keurig op papier.
Nu heeft ook op onze school de computer (Tandy, Model III, 16k) zijn intrede gedaan en ik heb daarvoor een programma gemaakt (in BASIC) dat bij een gegeven eerstegraads functie de bijbehorende grafiek laat zien op het beeldscherm:

Geef m, n? 1,3 <ENTER>
Dit is de grafiek van $f: x \to 1.00x + 3.00$
Het nulpunt is -3.00



Geef m, n?

Met dit programma laat ik de klas even spelen: toets de beide coëfficiënten van het functievoorschrift in, druk op de ENTER-toets en kijk wat er op het scherm verschijnt.

Na enige tijd draai ik de vraagstelling om: bedenk nu zelf eens een functie waarvan:
- de grafiek door het punt (0, 0) gaat
- de grafiek de positieve Y-as snijdt
- de grafiek achterover helt
- de grafiek evenwijdig is aan de vorige
- enz.

Deze oefening met de computer en een omgekeerde vraagstelling, blijkt buitengewoon verhelderend voor de leerlingen te zijn:
'je ziet het nu echt voor je'
'je ziet heel veel grafieken in korte tijd'
'je kunt gemakkelijk uitproberen wat er gebeurt als je de coëfficiënten verandert'.

Ook begrippen als richtings-coëfficiënt en nulpunt blijken uit de mist te komen.
De positieve reactie van de leerlingen heeft er toe geleid dat ik een zelfde computerprogramma heb gemaakt voor functies met de vorm
$f: x \to a(x - t_1)^2 + t_2$
Bij beide programma's zijn 2 oefenbladen.
Op het eerste blad staan telkens 2 of 3 getallen die de coëfficiënten zijn van een functie-voorschrift.
Gevraagd wordt om achter die getallen in te vullen:
het functie-voorschrift, de richtingscoëfficiënt, het snijpunt met de Y-as en het nulpunt.
Of bij 3 getallen:
het functie-voorschrift, de top, berg- of dalparabool
'Kijk of je deze dingen terug kunt vinden in de grafiek die de computer laat zien'.

Dit eerste oefenblad is bedoeld als herhaling van het geleerde en tevens als kennismaking met het programma.
Het tweede oefenblad geeft telkens de omschrijving van een grafiek waarbij de leerlingen het functievoorschrift moeten vinden. Op de computer kunnen ze dan controleren of deze functie inderdaad een grafiek heeft die aan de gestelde voorwaarden voldoet.
Ook bij groepswerk blijkt dit systeem goed te werken:
bij toerbeurt bedient één lid van de groep de computer, de rest kijkt mee, controleert en helpt.

* Prijsvraag, zie Euclides 60, nr.1, blz. 81.

Omdat één en ander geen rekenwerk vraagt en vrij snel kan gaan zijn er nauwelijks afvallers.
Ook zet ik wel eens een leerling individueel met deze programma's aan het werk.

Conclusie:
door inschakeling van de computer is een vraagstelling mogelijk die anders praktisch niet mogelijk was.
Ik heb bovendien de indruk dat het effectief werkt.
Het bovenstaande lijkt mij alleszins de moeite van het proberen waard.

Wie de (vrij korte) programma's niet zelf wil maken kan bij mij de listings- en oefenbladen aanvragen door *f* 5,– over te maken op giro 5362562 t.n.v. I. H. Markusse-Tack, onder vermelding van 'programma-grafieken'.
Het bovenstaande systeem is natuurlijk uit te breiden. Ik heb ook programma's gemaakt voor
- de grafiek van $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$
  (maak een parabool met 2 positieve nulpunten, maak een parabool die niet in het eerste kwadrant ligt)
- 2 rechte lijnen in één rooster
  (ter oefening van de afbeeldingen)
- 2 functies in één rooster
  (afbeelding van parabolen, snijpunten van 2 functies)

Of deze programma's ook zo verhelderend werken is voor mij de vraag. Ze zijn wel goed bruikbaar als oefenmiddel.
Wie bovendien een computer kan aansluiten op een televisiescherm, kan ook klassikaal met deze programma's aan 't werk.
Ook voor docenten blijft er ruimte voor eigen inzichten!

Boekbespreking

Detlef D. Spalt, *Vom Mythos der Mathematischen Vernunft*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 406 blz., DM 42,–.

Uit de tekst op de band van dit boek:
'Die vorliegende Studie landet einen ersten schweren Schlag gegen den mathematischen Dogmatismus, diese letzte und älteste Bastion unserer wissenschaftlichen Objektivität, und zwar im Feld der traditionreichen Analysis: aus den Blickwinkeln ganz unterschiedlicher philosophischer Standpunkte emtspinnt sich ein fesselnder Dialog ...'
De lezer komt naar mijn mening echter bedrogen uit. Wat als een boeiend geheel gepresenteerd wordt blijkt een uitermate vervelend en langdradig gesprek te zijn (in gespreksvorm!) tussen 7 studenten over een aantal methodologische vragen in historisch perspectief. Aan de hand van een aantal oorspronkelijke teksten laat de schrijver deze personen de ontwikkeling van het begrip uniforme convergentie onderzoeken.
Uit het feit dat er in het verleden wel onjuiste stellingen geponeerd (bijv. de somfunctie van een convergente reeks van continue functies is continu) en tevens bewezen zijn (zojuist geformuleerde stelling door Canchy) ontspint zich een discussie over het begrip 'wiskundige strengheid' en over 'bewijzen'. (Wat betekent 'bewijzen' als het achteraf gezien, over een onjuiste stelling gaat). Daarbij voorbijziend aan het feit dat wiskundebedrijven een menselijke bezigheid is waarbij we met vallen en opstaan telkens een stukje verder proberen te komen. Ook wij zullen, uiteraard, fout op fout maken. Daarvan uitgaande past het ons veel bescheidener dan de schrijver doet op te stellen t.o.v. het verleden.
Hij geeft zijn boek de ondertitel mee:
'Dokumentation einer vergeblichen Suche nach der Einheit der Mathematischen Vernunft'. Het komt mij echter voor dat wij hier te maken hebben met 'Eine Vergebliche Dokumentation'.

W. Kleijne

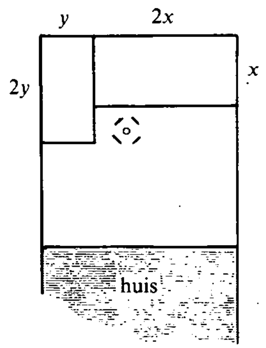
Hewetaardigheden

Hans van Lint

Waarom meedoen aan het Hewet-experiment? De invoering van wiskunde A en wiskunde B betekent het einde van wiskunde II. Men heeft mij al vaak gevraagd of ik dat niet jammer zou vinden. Het geven van een antwoord op die vraag is gevaarlijk. Als men het niet jammer vindt dan is men toch geen echte wiskundige! Het vak zat goed in elkaar en was ook leuk om te geven. De vectormeetkunde gaf alle leerlingen die geen ruimte-inzicht hadden de gelegenheid om elke stereometrische vraag met algebraïsche hulpmiddelen op te lossen. De lineaire afbeeldingen waren heel mooi in verband te brengen met ruimtelijke afbeeldingen. Helaas heb ik de indruk gekregen dat veel leerlingen nog minder in de ruimtelijke tekeningen konden zien dan vroeger. Jammer vond ik het ook dat er toch te weinig tijd was om voldoende variatie aan te brengen in de toepassingen van matrices.
Wij experimenteren nu al drie jaren met wiskunde A en de nieuwe ruimtemeetkunde en al zijn we nog lang niet tevreden, het is toch zeer verheugend om te zien dat de meer toepassingsgerichte aanpak heel goed aanslaat bij de leerlingen. Nu komt pas goed naar voren waarom allerlei opleidingen wiskundige kennis van de leerlingen eisen. Voorbeelden uit het tijdschrift *Pythagoras* en boeken als *Levende Wiskunde*, *The man made world*, *Natuurkunde van het vrije veld*, enz., enz. zijn nu goed in de les te gebruiken en niet alleen stof voor een laatste les voor een vakantie.
Een groot probleem bij de wiskunde A blijft het vinden van geschikte opgaven. Veel opgaven zullen we zelf moeten bedenken en dat betekent ook veel snuffelen buiten je eigen vakgebied. Met een aantal voorbeelden wil ik trachten aan te geven hoe de 'gewone' wiskunde, die we altijd al gaven in 'nieuwe stijl'-opgaven naar voren kan komen.

Functies maken

De familie Roosindetuin heeft een tuin van 12 bij 10 meter. Langs de achterkant en een gedeelte van een van de zijkanten willen ze struiken en bloemen hebben. Ze komen op het idee om twee gelijkvormige rechthoekige bloemperken te maken, waarvan de lengte tweemaal zo groot is als de breedte (zie figuur 1).



Figuur 1

Ze stellen zich voor hun tuinstoelen zó te zullen zetten dat ze aan twee kanten van het zitje bloemen zullen hebben.
We laten de leerlingen eerst enkele gevallen tekenen, b.v. de tuin met $x = 2{,}5$ en de tuin met $x = 3$.

Vraag a
Aan welke voorwaarde(n) moeten x en y voldoen? Dit lijkt erg eenvoudig maar een strategie van aanpak hebben leerlingen nooit gehad. Waar begin je, wat is het belangrijkste en welke voorwaarden zijn van elkaar afhankelijk? Mondeling zou zoiets als volgt kunnen gaan:

Ll.	$0 < x < 12$	ik zeg (toch) ja
	$0 < 2y < 12$	dus?
	$0 < y < 6$	ja, en die achterkant?
	$2x + y = 10$	juist, maar dan ...?
	$0 < x < 5$	dat zie je zó, maar als je y in x uitdrukt

$0 < 10 - 2x < 6$

dus: $2 < x < 5$ — als je ook nog aan het zitje denkt ...?

Na wat gereken komt er:

$2 < x < 4$ en: $2 < y < 6$ en: $y = 10 - 2x$ en: $2y > x$.

Hoe precies je wilt voldoen aan de eis dat er aan twee kanten van het zitje bloemen zijn is een typische A-vaagheid!

Vraag b

De familie Roosindetuin wil dat de oppervlakte van de twee perken samen minimaal is. Bereken x en y.

De oppervlakte van de twee perken samen is: $A = 2x^2 + 2y^2$.

Hoewel je in de onderbouw vreselijk precies de functienotatie besproken hebt, moet je toch met zo'n losse A werken. Bij veel vakken waar men wiskunde gebruikt haalt men functiewaarde- en functienotatie door elkaar. Het kost dan ook enige moeite om er (door alle leerlingen) een functie van één variabele van te laten maken:

$$A = 10x^2 - 80x + 200.$$

Afhankelijk van het onderwerp dat je oefenen wilt, kies je nu kwadraatafsplitsen of differentiaalrekening om het gevraagde minimum en de bijbehorende waarden van x en y te berekenen. A blijkt minimaal te zijn als $x = 4$ en dus $y = 2$.

Helaas kost het mij meestal veel moeite om te zorgen dat een met wiskundige methoden verkregen antwoord ook nog gecontroleerd wordt. Bij de wiskunde A vraagstukken is dat echt noodzakelijk. Je zou hier op kunnen merken dat de familie R. toch wel erg teleurgesteld was!

Differentiëren

Aangezien we niet voldoende echte voorbeelden uit de praktijk tot onze beschikking hadden en bovendien dergelijke voorbeelden vaak toch niet precies passen bij de leerstof die je toetsen wilt, was ik genoodzaakt iets te verzinnen. We hadden veel differentieerregels gehad en wilden die toetsen met een economisch voorbeeld. Vermoedelijk komt een econoom niet met de monsterlijke functie die in mijn voorbeeld geboren is, maar ik ben uitgegaan van een grafiek en heb daar een economische situatie bij verzonnen. De functiewaarden moesten enigszins realistisch zijn en dus niet 'gezellig'. De vragen die we vroeger in een abstract voorbeeld stelden heb ik getracht zo goed mogelijk te vertalen naar de praktijk-situatie. Dat je daar erg mee uit moet kijken is bij vele antwoorden wel gebleken!

Supermarkt 'S.M.' heeft een vrij constant maandelijks verkoopcijfer van 161000 gulden. De directie is van mening dat de omstandigheden een uitbreiding van de zaak toelaten. Er wordt een plan voor een verbouwing gemaakt. Tijdens de verbouwing, die een jaar duurt, kan maar een gedeelte van de oorspronkelijke verkoopruimte gebruikt worden, zodat men eerst met voordelige prijzen een opruimingsperiode begint. Daarna zal een terugloop van de verkoop onontkoombaar zijn. Een economisch adviesbureau dat al vaker dit soort werk gedaan heeft stelt in overleg met de directie, de architect en de aannemer een functie op die de verkoopcijfers gedurende de periode van opruiming en verbouwing alsmede die tijdens het functioneren van het nieuwe pand redelijk moet weergeven.

$$V_t = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - 7t^2 + 33t + 161 & \text{voor } 0 \leqq t \leqq 12 \\ \dfrac{480t - 2635}{2t + 1} & \text{voor } t > 12 \end{cases}$$

t in maanden; op $t = 0$ begint de opruiming: V_t is de verkoop in de maand t in duizenden guldens.

vraag a: Toon aan dat door de opruiming de verkoopcijfers meteen gaan stijgen.

De bedoeling was uiteraard dat aangetoond werd dat de afgeleide van V_t voor $t = 0$ positief is maar vele leerlingen gingen een beetje teveel in de A-sfeer gewoon V_t uitrekenen met hun rekenmachine voor $t = 1$ of $t = \frac{1}{4}$. Als die waarde groter was dan V_0 dan was het toch ook aangetoond. Theoretisch was er wel iets op aan te merken maar in de praktijk zal het toch wel niet zo gek gevonden worden.

vraag b: Wat is het maximale verkoopcijfer voor de verbouwing klaar is?

Intensieve training op dit soort vragen heeft ervoor

gezorgd dat de meesten nu wel met differentiaalrekening gaan werken. Sommigen echter hebben ook hier gewoon een aantal waarden van V_t berekend en hebben zo het maximum gevonden.

vraag c: In welke periode dalen de verkoopcijfers?

vraag d: Wat is de gemiddelde daling van de verkoopcijfers per maand in de periode van $t = 0$ tot het moment dat de verkoop minimaal is?

vraag e: Voor de goede naam van S.M. mag de daling van de verkoop op geen enkel moment te sterk zijn. Op welk moment is de daling van de verkoop het sterkst en hoe groot is die daling dan?

Het begrip buigpunt is nooit aan de orde geweest en werken met een tweede afgeleide komt bij wiskunde-A ook niet aan de orde. Dat in deze vraag een daling op een bepaald moment bedoeld werd was eigenlijk al te lastig. Wederom werd aan de hand van een serie waarden van V_t de daling (ongeveer) bepaald. Hoewel zulke antwoorden niet echt vreselijk fout waren, is het duidelijk dat ik wel teleurgesteld was.

vraag f: Toon aan dat na $t = 12$ de verkoop voortdurend zal stijgen in dit model.

De leerlingen die alleen maar waarden van V_t uitrekenden, kregen het hier door het woord 'voortdurend' wat moeilijker, maar begrijpelijk is wel, dat eenmaal hieraan begonnen iemand op dezelfde manier doorgaat.

vraag g: Welk maandcijfer voor de verkoop kan men in de toekomst verwachten volgens dit model?

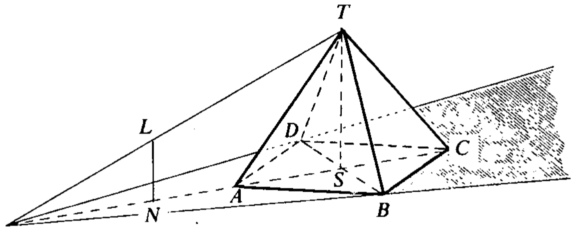
Degenen die denken aan een limiet als t onbeperkt toeneemt of aan een 'horizontale' asymptoot, willen nog wel eens ietsje minder dan de limietwaarde als antwoord geven en uiteraard reken ik dat bij zo'n vraag goed.

Vermoedelijk is het bovenstaand vraagstuk meer geschikt om in de klas te behandelen dan om bij een toets te gebruiken.

Ruimtemeetkunde

Dit vak heeft zeer veel mogelijkheden. We moeten er voor zorgen dat het aan zijn doel gaat beantwoorden. Bij wiskunde II heeft de vectormeetkunde er veel toe bijgedragen dat de leerlingen toch te weinig ruimte-inzicht kregen. De vectormeetkunde moet echter niet verdwijnen. Je kunt er op een mooie manier, de oplossingen van lastige meetkundige problemen mee vinden. Het is mij gebleken dat je bij proefwerken weinig risico's kan nemen omdat de leerlingen het toch snel te moeilijk vinden. Laten we hopen dat de eindexamens niet te 'dol' gaan worden maar dat we wel leuke, praktische problemen kunnen gaan behandelen.

Voorbeeld 1



Figuur 2

$TABCD$ is een massief houten regelmatige pyramide, die op een tafelblad (de uitbreiding van vlak $ABCD$) staat. Statief NL staat loodrecht op het tafelblad en heeft in L een lampje dat de pyramide beschijnt. Teken de schaduw van de pyramide op het tafelblad.

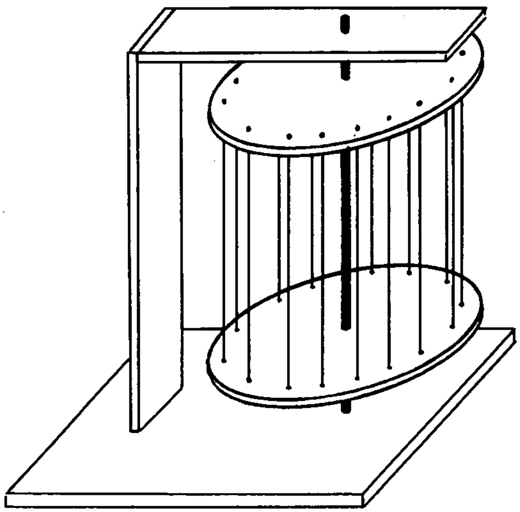
Hoewel je gemakkelijk genoeg kunt beredeneren dat de lichtstralen door L en een punt van TB een schaduwrand geven, zodat je de snijlijn van LTB en $ABCD$ moet construeren blijkt dit ook voor B-leerlingen soms nog te lastig te zijn.

Variant

De lamp L zit aan het uiteinde van een stok die tegen vlak ADT is gespijkerd en bij AT iets uitsteekt.

Voorbeeld 2

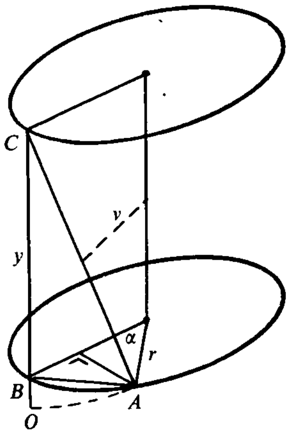
Door onze amanuensis heb ik het apparaat, geschetst in figuur 4, laten maken. De bovenste houten schijf is vast gemonteerd aan de bovenste plank. De onderste schijf hangt aan draden en kan draaien om de vaste pen die in de onderste plank



Figuur 3

zit. Door de onderste schijf te draaien gaat hij omhoog omdat de touwtjes scheef lopen. De onderste schijf kan met een knijper aan de linker plank vastgezet worden.

a Welk verband bestaat er tussen de afstand van de twee schijven en de hoek α waarover de onderste schijf gedraaid is?
b De doorsneden van het dradenlichaam met vlakken evenwijdig met de schijven zijn cirkels. Bereken de straal van de kleinste cirkel als de onderste schijf $\alpha°$ gedraaid is, figuur 4.



Figuur 4

Lengte draden is $OC = AC = h$. De nieuwe afstand van de schijven is $BC = y$ en $AB = p$. Straal schijf is r.
$p^2 = (r - r \cdot \cos\alpha)^2 + (r \cdot \sin\alpha)^2$.
$h^2 = p^2 + y^2$
Hieruit volgt dat: $y^2 = h^2 - 2 \cdot r^2 \cdot (1 - \cos\alpha)$.
Als straal kleinste doorsnede is v dan geldt:
$v^2 = r^2 - (\frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 \cos\alpha$.

Eindredactie

Mevrouw Henny Susijn-van Zaale heeft haar werk als eindredactrice van Euclides in december 1984 beëindigd. Met name hebben de 'technische problemen' bij de produktie van de lopende jaargang, die geheel buiten de invloedssfeer van de redactie liggen, haar tot dit besluit gebracht.
Namens de redactie dank ik mevrouw Susijn voor de zorgen en toewijding waarmee ze deze taak sinds 1981 uitgevoerd heeft.

Frans Dolmans

Recreatie

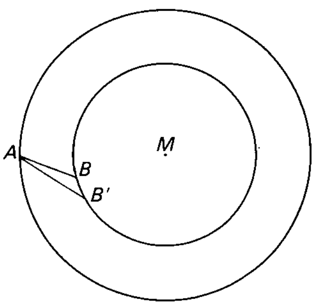
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgave

526 Een handelaar heeft zes pakketten die verzonden moeten worden. Hij vraagt zijn knecht (medewerker) ze te wegen. De knecht heeft enig gevoel voor humor en weegt de pakketten niet afzonderlijk, maar twee aan twee. Hij vertelt zijn baas dat ze twee aan twee wegen
9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 26 en 29 kg
De handelaar geeft geen krimp, bedankt zijn knecht en rekent de zes gewichten uit. Hoe deed hij dat?

Oplossingen

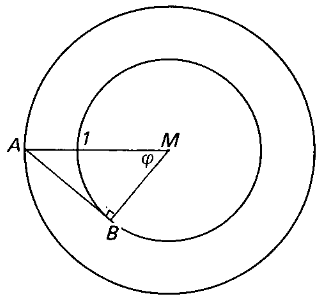
521 Midden in een cirkelvormig meer met straal 1 km bevindt zich een puntvormig eiland waarop een vuurtoren staat. Het licht van de vuurtoren roteert eenparig; een omwenteling duurt 1 min. Aan de oever van de vijver ligt een motorboot. Deze boot wil met constante snelheid naar het eiland varen zo, dat hij niet door het licht ingevangen wordt. Gevraagd de onderste grens van de snelheden waarmee dit mogelijk is.
Onderstel de boot ligt in A. Hij zal starten op een moment dat het licht A passeert. Hij vaart het meer op van A tot een punt B waar hij door het licht dreigt ingevangen te worden. Vanaf dat moment moet hij het licht voor blijven. Zijn snelheid moet daartoe (minstens) gelijk zijn aan de snelheid waarmee het licht zich in B beweegt. Onderstel fig. 1 geeft de ligging van B weer.



Figuur 1

Neem aan dat het licht in positieve richting roteert, dus linksom. Kies B' iets beneden B op de cirkel (M, MB). Onderstel de snelheid van de boot is v. Als de boot met snelheid v van A naar B' gevaren was, zou hij daar het licht nog voor geweest zijn, want $AB' < AB$ + lengte boog BB'. Hij had dan met een lagere snelheid kunnen volstaan.

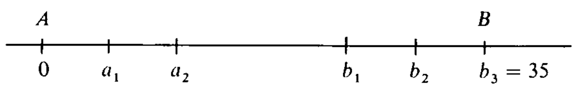
De snelheid v is dus minimaal, als de lijn AB de cirkel in B raakt. (Men zou B nog voorbij het raakpunt kunnen kiezen, maar dan was de boot reeds door het licht ingevangen, voordat hij in B was gekomen.) Zie figuur 2.



Figuur 2

Noem de hoeksnelheid van het licht ω(rad/sec) en stel $\angle AMB = \varphi$(rad). Dan is
$AB = \sin \varphi$
de snelheid van de boot = de snelheid van het licht in $B = \omega MB$
$= \omega \cos \varphi$
de tijd die de boot over AB gevaren heeft = de tijd waarin het licht over $2\pi + \varphi$ gedraaid is $= \dfrac{2\pi + \varphi}{\omega}$
Waaruit volgt:
$$\sin \varphi = \omega \cos \varphi \frac{2\pi + \varphi}{\omega}$$
dus
$\tan \varphi = 2\pi + \varphi$
Voor de onderste grens van de snelheid van de boot vindt men dan
$$\omega \cos \varphi = \frac{2\pi}{60} \cos \varphi (\text{km/sec}) = 2\pi \cos \varphi \cdot 60 (\text{km/h})$$
Volgens het boek komt hieruit bij benadering 51,7 km/h. (Zelf vind ik 48,4 km/h.)

523 Een weg AB is 35 km lang. Drie wandelaars en een auto bevinden zich in A. De wandelaars moeten zo snel mogelijk in B komen. De auto kan daarbij één wandelaar tegelijk vervoeren. Instappen, uitstappen en keren kost geen tijd. Hoeveel km rijdt de auto?



De coördinaten langs de weg zijn de km-afstanden gemeten vanaf A.
De wandelaars starten in A en de auto neemt één van hen mee en zet die in b_1 af. Hij rijdt terug totdat hij de wandelaars in a_1 tegenkomt, neemt één van hen mee en rijdt totdat hij de in b_1 gestarte wandelaar achterop rijdt. Dit geschiedt in b_2. Daar zet hij zijn passagier af, rijdt terug naar a_2 waar hij de derde

wandelaar oppikt. Met hem rijdt hij tot het punt b_3 waar hij de beide anderen achterop rijdt. Als $b_3 = 35$, dan is de totale manoeuvre in een minimale tijdsduur volbracht.
Dit leidt tot de volgende vergelijkingen.
$2b_1 - a_1 = 9a_1$
$b_1 + b_2 - 2a_1 = 9(b_2 - b_1)$
$2b_2 - a_1 - a_2 = 9(a_2 - a_1)$
$b_2 + b_3 - 2a_2 = 9(b_3 - b_2)$
Hieruit vinden we resp.
$b_1 = 5a_1, b_2 = 6a_1, a_2 = 2a_1, b_3 = 7a_1$
De auto heeft gereden
$b_1 + (b_1 - a_1) + (b_2 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_2) =$
$= 5a_1 + 4a_1 + 5a_1 + 4a_1 + 5a_1 = 23a_1$
De auto heeft dus gereden
$\frac{23}{7}b_3 = \frac{23}{7}35 = 115\,\text{km}$
Nu algemeen. De vergelijkingen worden
$b_i + b_{i+1} - 2a_i = 9(b_{i+1} - b_i)$
$2b_{i+1} - a_i - a_{i+1} = 9(a_{i+1} - a_i)$
Met volledige inductie blijkt dat hieraan voldoet
$a_i = ia_1$ en $b_i = (i + 4)a_1$
De lengte van de weg is dan $b_n = (n + 4)a_1$.
De auto heeft gereden $n \cdot 5a_1 + (n - 1) \cdot 4a_1 = (9n - 4)a_1$.
Dus $\frac{9n - 4}{n + 4}35$ km.

524 De auto's van Henk en van Gert lopen op Belgische benzine 1 op 12 en op Franse 1 op 10. Op een mengsel stijgt het verbruik evenredig met het percentage Franse benzine. Aan de grens vullen beide hun tank met 40 liter Belgische benzine. Henk rijdt zijn tank leeg en rijdt verder op Franse benzine. Gert heeft een mechaniekje in zijn auto waardoor zijn tank voortdurend bijgevuld wordt met Franse benzine. Ze rijden 800 km. Wie heeft het grootste aantal liters benzine verbruikt?
Henk heeft het volle profijt gehad van zijn 40 liter Belgische benzine. Gert nog niet, want in zijn tank blijft steeds een percentage Belgische benzine aanwezig. Gert verbruikt dus het grootste aantal liters.

525 Iemand werpt met een gewone dobbelsteen tot hij in totaal minstens 28 ogen heeft gegooid.
Hoeveel worpen zullen hiervoor gemiddeld nodig zijn?
A 5 B 7 C 8 D 9
Het grootste aantal worpen dat nodig kan zijn, is 28. De kans dat dit het geval is, is 6^{-28}. Dit geval levert een bijdrage tot het verwachte aantal van $28 \cdot 6^{-28}$.
Er zijn 27 worpen nodig, als 26 keer 1 en 1 keer 2 gegooid wordt of eerste 26 keer 1 en daarna 3, 4, 5 of 6. Dit geval levert als bijdrage voor het verwachte aantal: $31 \cdot 6^{-27}$ of $31 \cdot 6 \cdot 6^{-28}$.
Zo kunnen we verder gaan. We vinden dan dat het verwachte aantal worpen is:
$(28 + 31 \cdot 6 + a_{26} \cdot 6^2 + ... + a_5 \cdot 6^{23})6^{-28}$
De getallen a_{26}, ..., a_5 zou ik niet graag allemaal moeten uitrekenen. Dat hoeft ook niet. Het getal tussen haken is niet deelbaar door 3. Er komt dus geen natuurlijk getal uit. Dus zijn de antwoorden A, B, C en D alle vier fout.
Dat 8 niet goed was, was een streep door de rekening en het item moest naar de prullemand verwezen worden.

Mededelingen

Examenbesprekingen lbo, mavo, havo, vwo 1985

De examenbesprekingen voor havo en vwo worden dit jaar gehouden op dinsdag 7 mei 1985. De examenbesprekingen voor lbo en mavo worden gehouden op vrijdag 10 mei 1985 evenals de bespreking van het examen wiskunde II voor vwo. Voor *alle* bijeenkomsten geldt dat de voorgeschreven normen *niet* gewijzigd mogen worden. Binnen de geldende normen kan men verfijningen afspreken.

Examenbesprekingen op dinsdag 7 mei 1985
Havo wiskunde van 16.00 h tot 18.00 h
Vwo wiskunde I van 19.00 h tot 21.00 h

Plaats	*Adres van de school*
Amsterdam	Sint Nicolaas Lyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51
Gespreksleiders havo:	K. Bouwmeester, 02990-2 37 74
vwo:	S. Min, 02290-3 77 56
Dongen	Dr. Schaepmancollege Mgr. Schaepmanlaan 13 5103 BB Dongen 01623-1 56 50
Gespreksleiders havo:	F. L. G. Esser, 01623-1 64 89
vwo:	A. L. D. van Merode, 01623-1 37 46
Groningen	Scholengemeenschap Oost Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00
Gespreksleiders havo:	J. V. Jansen, 05900-1 30 43
vwo:	M. van Steenis, 05908-1 81 21
Rotterdam	City College Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33
Gespreksleiders havo:	E. van Dongen, 010-67 21 30
vwo:	B. Hillebrand, 01807-1 51 20
Zutphen	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41
Gespreksleiders havo:	J. van den heuvel, 05750-2 39 63
vwo:	Drs. W. A. Weenink, 055-33 70 48

Examenbesprekingen lbo-c, mavo-c en mavo-d op vrijdag 10 mei 1985 van 15.00 h tot 18.00 h.

Plaats	*School*
Alkmaar	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38
Gespreksleiders c:	T. Dunselman, 075-28 40 42
d:	P. Werhoven, 02207-1 50 76
Amersfoort	Andreasmavo Ringweg Koppel 7 3813 BA Amersfoort 033-72 01 03
Gespreksleiders c:	J. Beckman, 03430-1 40 16
d:	J. C. Vos, 033-75 17 19
Amsterdam	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 1068 MR Amsterdam 020-19 83 99
Gespreksleiders c:	E. G. Doevendans, 020-36 20 49
d:	F. E. van der Meulen
Arnhem	Thorbeckescholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28
Gespreksleiders c:	M. Hondelink, 05475-13 22
d:	L. Hoekstra, 08819-38 60
Breda	Lhnoschool Groene Woud Groene Woud 2 4834 BC Breda 076-65 62 50
Gespreksleiders c:	A. Braat, 01650-3 72 42
d:	W. van Gaans, 01650-4 31 65
Deventer	Mr. van Marle Scholengemeenschap Ludgerstraat 1 7415 DV Deventer 05700-2 90 00
Gespreksleiders c:	K. Selles, 05700-5 07 24
d:	J. F. Laaper
Eindhoven	Dr. Edith Steinmavo Gen. van Merlenstraat 5 5623 GC Eindhoven 040-43 52 30
Gespreksleiders c:	J. van Hees, 040-53 28 48
d:	J. C. G. W. van den Berg, 04927-17 44
Emmen	Openbare S.G. De Dissel Smedingeslag 1 7824 HK Emmen 05910-2 34 56
Gespreksleiders c:	J. F. Struik, 05919-1 27 90
d:	R. Zwierstra, 05910-1 37 11
's-Gravenhage	Daltonmavo Louis Hage Amerongenstraat 1 2546 VV 's-Gravenhage 070-29 46 93
Gespreksleiders c:	C. Dirks, 01727-77 58
d:	C. J. Jol, 070-85 27 74
Groningen	Gemeentelijke S.G. Zuid Parkweg 128 9727 HD Groningen 050-26 03 45
Gespreksleiders c:	S. Kooiman, 050-25 12 89
d:	J. Borst, 05960-2 54 64
Haaksbergen	R.K. Mavo De Raahorst Van Brakelstraat 1 7482 VV Haaksbergen 05427-1 32 85
Gespreksleiders c:	G. Nijenmanting, 05427-1 32 13
d:	C. Th. J. Hoogsteder, 08350-2 43 37
Haarlem	R.K. Mavoschool Jeroen Overtonstraat 42 2024 XK Haarlem 023-25 17 49
Gespreksleiders c:	H. Kamminga, 023-28 92 58
d:	P. van der Meijde, 023-37 57 57
's-Hertogenbosch	Scholengemeenschap De Dommel Emmaplein 19 5211 VZ 's-Hertogenbosch 073-13 56 74
Gespreksleiders c:	M. Bekkers, 04116-7 71 19
d:	F. J. Mahieu, 04116-7 34 68
Hoogezand	Dr. A. Jacobs Scholengemeenschap Nieuweweg 27 9603 BH Hoogezand 05980-9 23 84
Gespreksleiders c:	E. van den Handel, 05900-1 32 68
d:	W. Visser, 05980-2 03 03
Leeuwarden	Mavo Nylân Prinsessenweg 4 8931 EG Leeuwarden 058-88 42 02
Gespreksleiders c:	F. de Boer, 05170-36 10
d:	J. Tuinstra, 05185-15 17
Middelburg	Oranje Nassauschool Oranjelaan 11 4332 VA Middelburg 01180-2 52 74
Gespreksleiders c:	C. Beimers, 01180-3 51 16
d:	A. Kammeraat, 01185-22 31

Panningen	Bouwens van der Boye College Minister Calsstraat 10 5980 AB Panningen 04760-30 31
Gespreksleiders c:	W. H. J. Basten, 04767-24 16
d:	W. Crijns, 04707-19 46
Rotterdam	Chr. Mavoschool Het Lage Land Kromhoutstraat 3-5 3067 AE Rotterdam 010-20 53 93
Gespreksleiders c:	A. B. T. Hazenberg, 01727-37 74
d:	L. Bozuwa, 078-16 39 46
Sittard	Scholengemeenschap St. Catharina Odasingel 90 6131 GZ Sittard 04490-1 75 86
Gespreksleiders c:	E. van der Vring, 04490-1 19 05
d:	J. J. H. Plum, 045-31 29 08
Utrecht	Mavo/Leaoschool Lunetten Kampereiland 6 3524 CZ Utrecht 030-88 35 51
Gespreksleiders c:	R. J. Roukema, 03432-28 95
d:	P. Visser, 03472-15 48
Zwolle	Thorbecke Scholengemeenschap Dr. van Heesweg 1 8025 AB Zwolle 038-54 66 77
Gespreksleiders c:	G. Scheppink, 05291-35 26
d:	S. R. Zwaan, 038-65 25 30

Examenbespreking vwo wiskunde II op vrijdag 10 mei 1985 van 19.00 h tot 21.00 h.

Plaats	*Adres*
Utrecht	Café Restaurant De Poort van Kleef Mariaplaats 7 030-31 80 84
Gespreksleider:	H. N. Schuring, 085-43 51 28

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen

brengt ter kennis aan belanghebbenden, dat degene die in 1985 wil deelnemen aan het examen wiskunde m.o. A of wiskunde m.o. B, af te nemen door de *algemene commissie*, zich vóór 15 mei 1985 dient aan te melden door storting of overschrijving van *f* 270,– examengeld op postrekeningnummer 172007 t.n.v. de voorzitter van de algemene examencommissie wiskunde m.o. te 's-Gravenhage.
Op de girokaart moeten de volledige naam en het volledige adres van de kandidaat worden vermeld, alsmede de aanduiding 'm.o.A.' dan wel 'm.o.B'. Na 15 mei ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.
Alle kandidaten worden geëxamineerd volgens de programma's zoals die zijn omschreven in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde jg. '63, blz. 86-93. Men kan deze programma's verkrijgen door storting van *f* 2,– op bovengenoemde postrekening met vermelding van 'examenprogramma'.
Het schriftelijk gedeelte van beide examens zal plaatsvinden op donderdag 22 en vrijdag 23 augustus 1985 in het congresgebouw te 's-Gravenhage.

10e studiedag VVWL-NVvW

Op zaterdag 23 maart a.s. houden de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren hun 10e gemeenschappelijke studiedag.
Plaats van samenkomst: Koninklijk Atheneum Kapellen, adres: Streepstraat 2, Kapellen (B).

Agenda
vanaf 9.30 uur ontvangst van de deelnemers
10.00 opening door de voorzitters Frank Laforce (NVWL) en dr. Theo Korthagen (NVvW)
10.15 dr. P. G. J. Vredenduin, Semantische en axiomatische wiskunde met betrekking tot het onderwijs
11.15 Rik Verhulst (Pius X-Instituut Antwerpen), Het aanbrengen van het continuïteitsbegrip
12.30 lunch
15.00 prof. dr. F. van der Blij (RU Utrecht), Wiskunde en biologie
16.00 rondvraag
16.30 sluiting

Treinreizigers nemen de trein van 9.24 uur uit Roosendaal. Aankomst Essen 9.32 uur. Daar overstappen op de stoptrein naar Antwerpen. Vertrek 9.34 uur. Aankomst Kapellen 9.53 uur.
Via de Stationsstraat, door de Dorpstraat (langs park) en dan linksaf de Streepstraat bereikt men het Koninklijk Atheneum.

Onze excuses dat, ten gevolge van gemaakte fouten, dit bericht u zo laat bereikt. U is welkom zonder dat u zich van te voren opgeeft.

Een doelbewuste keuze!

Een wiskundemethode kies je niet van de ene op de andere dag. Je moet er jaren mee vooruit. Daarom gaat aan de keuze vaak een langdurig proces vooraf: sectieberaad, het opstellen van criteria waaraan de methode moet voldoen, informatie inwinnen en ga zo maar door.
Een ding is zeker . . . als het om de keuze van een wiskundemethode gaat speelt Educaboek altijd een rol.
Want Educaboek beschikt momenteel over een uitgelezen aantal methodes, elk met een eigen identiteit, geschreven door groepen vooraanstaande docenten.

Getal en Ruimte

Een gerenommeerde methode, die de onderwijsontwikkelingen op de voet volgt en zich geregeld vernieuwt. Compleet voor mavo-havo-vwo (incl. een nieuw A- en B-programma).
Vraag de nieuwe, gratis Documentatie aan.

HEWET wiskunde

Wiskunde voor de bovenbouw van het vwo.
Deze uitgave is gebaseerd op het wiskundemateriaal dat in het kader van het HEWET-experiment door de vakgroep OW & OC werd ontwikkeld.

De Wageningse Methode

Met ingang van schooljaar 1985/86 brengt Educaboek een speciale editie voor de onderbouw havo/vwo uit die rechtstreeks aansluiting geeft op het HEWET-materiaal. Een methode die reeds werd beproefd op vele scholen.

Wiskunde Afgerond

Een serie boekjes ter voorbereiding op het examen wiskunde op C- en D-niveau.
Diagnostische toetsen met uitleg, oefenstof, differentiatie op twee niveaus.

Uitgekiend!

Gedifferentieerde rekenmethode met een zeer laag instapniveau.
Snel en efficiënt achterstanden in rekenen ophalen.

De nieuwe wiskunde catalogus 1985 is verschenen. Hebt u deze niet ontvangen? Bel dan (03450) 71 880.

Educaboek

Postbus 48
4100 AA Culemborg
Tel. (03450) 71 911

4400

Inhoud

Adressen van auteurs

L. Bozuwa, Abeelstraat 7, 3329 AA Dordrecht

P. W. van den Brink, Italiaanse Zeedijk 120, 1621 AK Hoorn

R. Dekker, p/a RUU, Postbus 80140, 3508 TC Utrecht

F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda

Ir. R. Leentfaar, 't Weerom 5, 2991 ER Barendrecht

H. van Lint, Parkstraat 22, 8011 CJ Zwolle

I. Markusse, Middelmeet 63, 4464 AZ Goes

H. N. Schuring, van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem

WIS SET

☆ volledige wiskundeprogramma's voor het VWO
☆ afgestemd op de HEWET
☆ overzichtelijke behandeling van wiskunde A en wiskunde B
☆ een ruime keuze aan originele opgaven
☆ geschikt voor elke didaktische aanpak

Reeds verschenen:
– WISSET voor 4 VWO
– bijbehorend boek met uitgewerkte antwoorden en grafieken
De vervolgdelen A en B voor 5 VWO verschijnen voorjaar '85.
Alle delen (óók voor 4 VWO!) verschijnen vanaf heden met stevige kaft en binding.

Een briefkaartje naar:
WISSET
Korund 2 1703 CV Heerhugowaard (telefoon: 02207 - 1 60 20)
en wij houden U op de hoogte van onze uitgaven.